Economics Working Paper 95

Modelos Autorregresivos para la Varianza Condicionada Heteroscedástica (ARCH)

Marc Sáez Zafra*
and
Jorge V. Pérez-Rodríguez†

October 1994

Keywords: ARCH models, Conditional and Unconditional Variances, Time–Varying Factors.
Journal of Economic Literature classification: C42, C22.

* Universitat Pompeu Fabra.
† Universitat de Barcelona.

Abstract

En el presente trabajo se introduce al lector en los modelos autorregresivos para la varianza condicionada heteroscedástica, incidiendo en los problemas que plantean los esquemas más sencillos y sugiriendo diversas soluciones. Se describe el concepto, las hipótesis y los modelos que explican la varianza condicionada en el tiempo desde diversas perspectivas del análisis estadístico: relación lineal o no lineal entre las variables y métodos de estimación de los parámetros. Finalmente, se discuten diversos contrastes que permiten escoger entre diversas especificaciones alternativas.

1.- INTRODUCCIÓN

En la Teoría Económica es práctica habitual suponer que Los agentes económicos no sólamente responden y actuan ante los cambios en los valores medios de las variables económicas, sino que también tienen en cuenta otros momentos de orden superior para tomar sus decisiones. Así, la teoría financiera considera no sólo a la rentabilidad sino también, y quizás primordialmente, a la volatilidad (varianza) como determinantes de las decisiones de cartera de los agentes.

Contrariamente, en la econometría estos momentos siempre han sido discriminados. En la econometría tradicional, por ejemplo, se ha supuesto que la varianza de la predicción es constante en el tiempo, ignorando que la incertidumbre y la aleatoriedad inherentes en los fenómenos económicos la modifican continuamente. Del mismo modo sucede en el análisis de series temporales, en el que siempre se ha exigido la estacionariedad de la varianza.

Sin embargo los modelos estadísticos modernos, por ejemplo los que realizan la valoración de los precios de los activos financieros, utilizan como elemento diferenciador los momentos condicionados y no condicionados de orden superior al primero, o r-ésimos. Las técnicas que se utilizan para modelizar los momentos de segundo orden, o más concretamente la heteroscedasticidad, resultan una ampliación del análisis de series temporales, popularizadas para los momentos de primer orden por **Box y Jenkins (1976)**. Estos modelos, en los que la varianza de la predicción puede cambiar en el tiempo, se denominan modelos Autorregresivos Heteroscedásticos Condicionados (ARCH) y fueron propuestos originariamente por **Engle (1982)**.

La amplia difusión de los modelos ARCH en trabajos empíricos, en especial en economía financiera, ha radicado en su éxito a la hora de sintetizar los rasgos que caracterizan el comportamiento dinámico a corto plazo de las variables involucradas, a saber agrupación ('clustering') de las volatilidades y la existencia de distribuciones incondicionales de probabilidad altamente leptocúrticas. Al tiempo que los modelos ARCH se han ido popularizando en la última década, también lo han hecho las panorámicas sobre los mismos, véase **Nijman y Palm** (1991), **Bera y Higgins** (1992), y sobretodo **Bollerslev, Chou y Kroner** (1992), por sólo citar algunos ejemplos. En castellano, el lector interesado puede recurrir al excelente artículo de **Novales y Gracia-Diez** (1993). En la misma línea, el presente trabajo pretende introducir al lector en estos modelos, incidiendo en los problemas que plantean los esquemas más sencillos y sugiriendo diversas soluciones. Así, se va a tratar de describir el concepto, las hipótesis y los modelos que explican la varianza condicionada en el tiempo desde diversas perspectivas del análisis estadístico: relación lineal o no lineal entre las variables y métodos de estimación de los parámetros.

2.- MODELOS AUTORREGRESIVOS CONDICIONADOS HETEROCEDASTICOS

Los modelos ARCH son una clase de procesos estocásticos que están caracterizados porque, aún teniendo media nula y estando serialmente incorrelacionados, poseen una varianza condicionada que no es constante en el tiempo.

En el modelo ARCH más sencillo (**Engle, 1982**) se parte de un esquema autoregresivo de orden uno (aunque para su formulación pueden utilizarse otros modelos ARMA más complejos, véase **Weiss (1984)**):

$$y_t=\phi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t$$

en el que ε_t es un ruido blanco ($\varepsilon_t \approx$ i.i.d. $N(0,\sigma^2)$).

Si se representa por $E_t[.]$ el operador matemático esperanza condicionada a la información existente, la media condicionada del proceso estocástico y_t es,

$$E_t[y_t]=\phi_1 y_{t-1}$$

mientras que la no condicionada (la media del AR(1) en este caso) es cero ya que no existe término independiente,

$$E[y_t]=0$$

Por otro lado, la varianza no condicionada de y_t (del AR(1)) es igual a

$$Var[y_t]=\frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$$

mientras que la varianza condicionada de y_t es,

$$Var_t\ [y_t\ ]=E_t\ [\ y_t-E_t\ [y_t\ ]\ ]^2=E_t\ [\phi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t-\phi_1 y_{t-1}]^2=E[\varepsilon_t^2]=\sigma_\varepsilon^2$$

Así, la distribución de y_t condicionada a la información existente es

$$y_t/\psi_{t-1}\sim N(0,h_t)$$

donde, ψ_{t-1} es el conjunto de información disponible en t-1, y con h^2_t se representa la varianza de y_t, dependiente del tiempo en nuestro caso.

Así pues, el modelo AR(1)-ARCH(1) la varianza condicionada de y_t sigue un polinomio autorregresivo de orden uno:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ E_{t-1}[\varepsilon_t] &= 0 \\ h_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned} \qquad [1]$$

siendo α_0 y α_1 parámetros desconocidos.

Los errores ARCH también pueden obtenerse a partir de un modelo de regresión con perturbaciones heteroscedásticas,

$$y_t = x_t \beta + u_t$$

donde, y_t es la variable dependiente, x_t es un conjunto de variables exógenas y endógenas retardadas incluidas en el conjunto de información ψ_{t-1}, y, β es un vector de parámetros desconocidos.

La distribución de la variable dependiente condicionada a toda la información existente es

$$y_t / \psi_{t-1} \sim N(x_t \beta, h_t^2)$$

en el que se ha supuesto la normalidad de la variable dependiente

Definiendo ε_t, error en t, como la diferencia entre el valor observado y el valor estimado de la variable dependiente en t,

$$\varepsilon_t = y_t - x_t \hat{\beta}$$

la varianza heteroscedástica, h^2_t, puede ahora formularse como

$$h_t^2=h(\varepsilon_{t-1},\ldots,\varepsilon_{t-p},x_t,x_{t-1},\ldots,x_{t-p},\alpha)$$

que supone incluir todo el conjunto de información en t-1, o bien de una forma más sencilla como

$$\varepsilon_t^2=h_t^2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\alpha_2\varepsilon_{t-2}^2+\ldots\ldots+\alpha_p\varepsilon_{t-p}^2=\alpha_0+\alpha(L)\,\varepsilon_{t-1}^2 \qquad [2]$$

donde, α_0 es el término independiente del polinomio autorregresivo, relacionado con la varianza no condicionada, y, $\alpha(L)=\alpha_1L+\alpha_2L^2+\ldots+\alpha_pL^{p-1}$. De esta forma, un ARCH(1) no es más que

$$y_t=x_t\beta+\varepsilon_t$$
$$E\,[\varepsilon_t]=0$$
$$Var_{t-1}[\varepsilon_t]=h_t^2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$$

donde, var_{t-1} es la varianza condicionada a la información en t-1.

Hipótesis del modelo ARCH

Del artículo de **Engle (1982)** se pueden extraer tres hipótesis iniciales que caracterizan al modelo ARCH(p).

Dependencia lineal de los valores de ε_t

En esta hipótesis se hace referencia conjuntamente tanto a la dependencia lineal de ε^2_t respecto a sus errores pasados y a la forma funcional lineal para la varianza condicionada.

Normalidad condicionada del error

Se supone que las observaciones generadas a partir de un modelo ARCH se distribuyen condicionalmente como una normal. Esta hipótesis permite aplicar la siguiente propiedad. Para una variable aleatoria X que está normalmente condicionada a la información existente, con media nula y varianza constante, el segundo r-ésimo momento de la misma se puede expresar como,

$$E[x^{2r}] = \sigma^{2r} \prod_{j=1}^{r} (2j-1)$$

Así, cuando la distribución condicionada de ε_t es normal y la varianza heterocedástica sigue un esquema ARCH(1),

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

con parámetros $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 > 0$, el segundo m-ésimo momento puede escribirse como

$$E[h_t^{2m} / \psi_{t-1}] = h_t^{2m} \prod_{j=1}^{m} (2j-1) = (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^m \prod_{j=1}^{m} (2j-1)$$

Acotación de las varianzas

Una hipótesis adicional que podemos considerar en la especificación del modelo ARCH es que la varianza ha de ser estrictamente positiva y finita.

Varianza estrictamente positiva

Para asegurar que la varianza condicionada sea estrictamente positiva en todos los valores o realizaciones pasadas del error, ε_t , el modelo ARCH necesita que el espacio de parámetros esté acotado a ser estrictamente positivo. Esto es, todos los valores de α_i en [2] deben ser positivos, $\alpha_i>0$, i=1,...,p.

Así, en el modelo ARCH(1) $\alpha_0>0$ y $\alpha_1>0$. Por otra parte, α_0 coincide con el valor de la varianza no condicionada que es constante.

Varianza finita o estacionaria

Para que las varianzas sean estacionarias y finitas, es decir, para que su función de densidad conjunta sea constante en el tiempo, la acotación de la varianza requiere que en [2] se cumpla el **teorema 1** de **Engle (1982)** el cual determina que el 2r-ésimo momento de un ARCH(1) debe verificar que

$$\alpha_1^r \prod_{j=1}^{r} (2j-1) < 1$$

Así, un modelo ARCH(1) con parámetros estrictamente positivos $\alpha_0>0$ y $\alpha_1>0$, tendrá un segundo momento condicionado positivo. Pero para que este momento esté acotado, es decir para que la varianza sea estacionaria y finita, se requiere además que $\alpha^1<1$.

Partiendo de [1],

$$h_t^2=\varepsilon_t^2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 \;=\; E[h_t^2]=\alpha_0+\alpha_1 E[h_{t-1}^2]$$

$$E[h_t^2]=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

Un proceso ARCH lineal de orden p será estacionario en covarianza si y sólo si, las raíces de la ecuación característica de h^2_t caen fuera del círculo unidad (**Engle, 1982**). Esta condición implica

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i<1$$

que no es más que su varianza incondicional, si el ARCH(1) es estacionario ($\alpha^1<1$). Mientras que la varianza incondicional de un ARCH(p) estacionario es,

$$Var[\varepsilon_t]=\sigma_\varepsilon^2=\frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i}$$

Obsérvese que,

$$h_t^2-\sigma_\varepsilon^2=\alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2-\sigma_\varepsilon^2)$$

es decir, la varianza condicional de h^2_t es mayor que su varianza incondicional, σ^2_ε cuando se producen 'sorpresas' altas (positivas o negativas).

Otros momentos incondicionados de orden superior pueden ser derivados a partir de las tres hipótesis vistas previamente (**Engle, 1982**). Bajo la hipótesis de normalidad condicionada los momentos de ε_t de orden impar son nulos por simetría. Mientras que los de orden par pueden ser derivados definiendo un vector w_t de variables retardadas, $w'_t=(\varepsilon^2_{t-1},\ldots,\varepsilon^2_{t-p})$, y resolviendo la siguiente ecuación:

$$E[w_t/\psi_{t-1}]=b+Aw_{t-1}$$

en la que,

$$b'=[\alpha_0,0,\ldots\ldots,0]'$$

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando sustituciones sucesivas

$$E[w_t/\psi_{t-k}]=(I+A+A^2+\ldots+A^{k-1})b+A^k w_{t-k}$$

y obteniendo el valor en el límite se consigue la expresión para los momentos estacionarios no condicionados de ε_t,

$$\lim_{k\to\infty} E\ [w_t\ /\psi_{t-k}\ ]=E\ [w_t\ ]=(I-A)^{-1}b$$

En el ejemplo más simple, si deseamos obtener el cuarto y el segundo momento estacionario no condicionado de un ARCH(1), tal que, $w_t=[\varepsilon^4_{t-1},\varepsilon^2_{t-1}]'$, aplicando el segundo supuesto, tenemos que

$$E\ [\varepsilon^4_{t-1}\ ]=\ (\alpha_0+\alpha_1\varepsilon^2_{t-1})^2\ \prod_{j=1}^{2}\ (2j-1)=\ 3\alpha_0^2+3\alpha_1^2\varepsilon^4_{t-1}+6\alpha_0\alpha_1\varepsilon^2_{t-1}$$

$$E\ [\varepsilon^2_{t-1}\ ]=\ \alpha_0+\alpha_1\varepsilon^2_{t-1}$$

entonces

$$E[w_t/\psi_{t-1}] = \begin{bmatrix} 3\alpha_0^2 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_1^2 & 6\alpha_0\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} w_{t-1}$$

siendo,

$$b' = \begin{bmatrix} 3\alpha_0^2 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3\alpha_1^2 & 6\alpha_0\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

por tanto, en el límite el valor de los momentos estacionarios no condicionados es un vector 2x1 de elementos, tales que,

$$E[w_t] = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{3\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2}\right]\left[\dfrac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}\right] \\ \left[\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right] \end{bmatrix}$$

en el que el elemento inferior es la varianza no condicionada del ARCH(1) y el elemento superior es el producto que obtiene el cuarto momento, si α_1 es distinto de cero (tercera hipótesis).

Es decir el momento de cuarto orden no es más que,

$$3(Var[\varepsilon_t])^2 \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$$

momento que es mayor que el de una variable normal dependiente e idénticamente distribuida. Es decir, las colas de la distribución marginal de ε_t son más 'gruesas' que la distribución normal. De hecho, despejando la ecuación anterior, los momentos de cuarto orden sólo existirán si α<.557

$$E[\varepsilon_t^4]<\infty$$

$$\alpha_1<3^{-\frac{1}{2}}=0.557$$

y los momentos de octavo orden

$$E[\varepsilon_t^8]<\infty$$

$$\alpha_1<105^{-\frac{1}{4}}=0.3123$$

3.- OTROS MODELOS ARCH

En la extensa literatura sobre los modelos ARCH se encuentran otros tipos de especificaciones, cada una de las cuales hace referencia a una de las hipótesis planteados en el modelo: dependencia, normalidad condicionada y forma funcional.

Hipótesis de dependencia de los valores pasados de ε^2_t

El modelo ARCH propuesto por **Engle (1982)** supone que la varianza condicionada, h^2_t, sólo depende de los valores pasados de ε^2_t. Sin embargo, h^2_t puede no depender exclusivamente de los errores pasados del modelo, sino de cualquiera de los elementos o variables incluidas en el conjunto de información ψ_{t-1}.

Desde este punto de vista, **Weiss (1984 y 1986)** sugiere algunos tipos de procesos ARCH donde h^2_t es una función de los valores retardados de y_t, de las predicciones de y_t y de otras variables exógenas que se encuentran dentro del conjunto de información. **Bollerslev (1986)** señala la posibilidad de que la varianza condicionada h^2_t sea, además, una función de los valores retardados de ella misma (h^2_{t-1}, ..., h^2_{t-p}), dando lugar a un tipo de modelos que se conocen como ARCH Generalizados o GARCH de orden (p,q). Desde una perspectiva multivariante **Engle, Granger y Kraft (1984)** y **Granger, Robins y Engle (1984)** indican que la varianza condicionada puede estar relacionada no sólo con los valores retardados de otras variables sino también con sus varianzas.

3.1.- MODELOS ARCH LINEALES

Los modelos lineales alternativos para los procesos de varianza condicionada heteroscedástica pueden ser sintetizados, según la literatura al uso, en cinco grandes especificaciones: modelo GARCH(p,q), modelo ARCH-M, modelo ARCH vectorial, modelo ARCH de factores latentes y modelo estructural de series temporales con errores ARCH.

Modelo GARCH(p,q)

El modelo GARCH (p,q) fue propuesto por **Bollerslev (1986)**. La ecuación que describe este modelo es una suma de polinomios: uno autorregresivo de orden p y otro media móvil de orden q, para la varianza heteroscedástica obtenida del ajuste en [1] o en [2]. Así,

$$h_t^2=\omega+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}^2=\omega+\alpha(L)\,\varepsilon_t^2+\beta(L)\,h_t^2 \qquad [3]$$

en el que, los valores de los parámetros del modelo deben ser positivos (es decir, $\omega>0$, $\alpha>0$ y $\beta>0$) para evitar que las varianzas sean negativas, las raices del polinomio $\beta(L)$ deben estar fuera del círculo unitario (como en un modelo ARMA (p,q)), y la varianza no condicionada (ω) debe ser constante para asegurar la estacionariedad en covarianza.

El modelo GARCH(p,q) en [3] puede reescribirse como un modelo ARMA(m,p), tal que

$$\varepsilon_t^2=\omega+(\alpha_1+\beta_1)\varepsilon_{t-1}^2+\ldots\ldots+(\alpha_m+\beta_m)\varepsilon_{t-m}^2-\beta_1 v_{t-1}-\ldots\ldots-\beta_p v_{t-p}+v_t \quad (5)$$

donde $m=\max(p,q)$, $\alpha_i=0$ para $i>q$, con ε_t y v_t incorrelacionados.

En un modelo GARCH(1,1) tal como,

$$h_t^2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}+\beta_1 h_{t-1}^2$$

es suficiente que $\alpha_1+\beta_1<1$, para que la varianza heteroscedástica sea estacionaria. En general, en un GARCH(p,q)

$$\sigma_\varepsilon^2=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\ldots-\alpha_q-\beta_1-\ldots-\beta_p}$$

y la condición de estacionariedad es que $\alpha_1+\ldots+\alpha_q+\beta_1+\ldots+\beta_p<1$.

La condición necesaria y suficiente para la existencia del 2 r-ésimo momento estacionario y finito en el GARCH(1,1) es que,

$$\mu(\alpha,\beta,r)=\sum_{j=0}^{r}\binom{m}{j}a_j\,\alpha_1^j\,\beta_1^{m-j}<1$$

que resulta de aplicar la fórmula de los momentos con respecto al origen, y en la que por ser una distribución normalmente condicionada se requiere adicionalmente que

$$a_0=1$$
$$a_j=\prod_{j=1}^{j}(2j-1)$$

Así, el segundo r-ésimo momento no condicionado para ε_t puede ser expresado de forma recursiva como

$$E\,[\varepsilon_t^{2r}]=a_r\left[\sum_{n=0}^{r-1}a_n^{-1}E\,[\varepsilon_t^{2n}]\;\alpha_0^{r-n}\binom{r}{r-n}\mu(\alpha_1,\beta_1,n)\right]x\,[1-\mu(\alpha_1,\beta_1,r)]^{-1}$$

y cuya formulación particular resulta más complicada que la del ARCH.

La mayoría de los modelos empíricos ARCH estimados adoptan el esquema GARCH, en concreto el de un GARCH(1,1). Una explicación a este hecho la proporciona **Nelson (1990a)**. Éste señala que el modelo GARCH(1,1) converge a un modelo de difusión de tiempo contínuo cuando la frecuencia de observación de los datos es 'arbitrariamente' alta (diaria, horaria, etc). Este hecho es muy usual en la teoría financiera, sustentada en ecuaciones diferenciales estocásticas en tiempo contínuo, mientras que los datos se observan en tiempo discreto. Una explicación alternativa la proporcionan **Brock, Hsieh y LeBaron (1991)**. Si ε_t^2 es lineal, el esquema GARCH(p,q) no es más que la representación parsimoniosa de un proceso infinito de Wold para ε_t^2.

Modelos Integrados en varianza

Si en el esquema más sencillo de generación de datos ARCH, un ARCH(p), se cumple $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p\geq 1$, o en un GARCH(p,q) $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+...+\beta_q\geq 1$, entonces existe, al menos, una raíz unitaria en el polinomio definido por su respectiva ecuación característica. Esta situación, que se corresponde con la persistencia en la varianza, es decir una respuesta 'excesivamente' lenta de la misma ante un shock, se denomina integración en varianza y se denota por IARCH(p) o IGARGH(p,q), respectivamente.

Nótese que al existir raices unitarias en los polinomios característicos, la varianza no condicionada no existe (o es infinita). De hecho, es el mismo fenómeno que se encuentra cuando se consideran distribuciones incondicionales estables para series financieras.

Tomando como punto de partida un modelo GARCH(p,q) caracterizado por

$$E_{t-1}[\varepsilon_t]=0$$
$$E_{t-1}[\varepsilon_t^2]=h_t^2=\omega+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}^2$$

con $\omega>0$, $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$. Si además,

$$1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\lambda^i-\sum_{i=1}^{p}\beta_i\lambda^i=0$$

Entonces existen **d**>0 raices unitarias y **(max(p,q)-d)** raices fuera del círculo unitario. El modelo de denomina integrado en varianza de orden **d** si $\omega=0$, e integrado en varianza de orden **d** con deriva si $\omega>0$.

El modelo IGARCH puede parecer similar en términos de predicción al de camino aleatorio para la media condicional. En el modelo de camino aleatorio con deriva la predicción de la media s periodos en el futuro es igual a la de hoy y los shocks en el sistema son permantentes. Del mismo modo, los shocks de la varianza condicionada cuando se manifiesta la existencia del IGARCH son también permanentes.

Pero a diferencia del camino aleatorio, o más genéricamente de los modelos ARIMA, el modelo IGARCH es estrictamente estacionario y ergódico (aunque no estacionario en covarianza). Además, mientras la teoría asintótica para los modelos ARCH es extremadamente difícil, Lumsdaine (1991) demuestra que los procedimientos estándar de inferencia asintótica son generalmente válidos incluso cuando los datos son generados por un modelo IGARCH, si bien las evidencias de Monte Carlo presentadas en Hong (1988) sugieren que los tamaños muestrales deben ser bastante grandes. Por otra parte, Nelson (1990b) demostró que un (I)GARCH con media nula, a diferencia de los modelos ARIMA, es empíricamente imposible, pues converge a cero con rapidez.

Muchos de los modelos GARCH empíricos estimados para series financieras son integrados en varianza. Según Nelson (1992) este fenómeno no es más que una consecuencia de las altas frecuencias de observación de los datos. En este sentido, cuando estas mismas series financieras son observadas a frecuencias bajas la evidencia de una raíz unitaria desaparece. Lamoreaux y Lastrapes (1990) sugieren que la aparente integración en varianza es el resultado de cambios estructurales.

La existencia de raices unitarias en las varianzas se puede contrastar de manera análoga al caso de las medias aunque, a diferencia de las raíces unitarias en media, los contrastes se distribuyen de una forma estándar (**Engle y Bollerslev, 1986**). Del mismo modo, y en analogía a la cointegración en media, la persistencia en varianza puede ser común entre diferentes series. En este sentido, las variables se dice que presentan co-persistencia o cointegración en varianza (**Engle y Bollerslev, 1986**; **Kunst,R.M., 1992**), lo cual tiene importantes implicaciones en la construcción del predictor óptimo a largo plazo para las varianzas y covarianzas condicionadas.

Modelo ARCH-M

El modelo ARCH-M (**Engle, Lilien y Robins, 1987**) pretende modelizar, simultáneamente, la evolución de la media y varianza de la serie temporal.

$$y_t = g(x_{t-1}, h_t^2; \beta) + \varepsilon_t$$

La forma funcional de g() suele ser lineal o logarítmica. En este modelo un incremento de la varianza condicionada estará asociado con un incremento o decremento de la media condicionada de y_t dependiendo del signo de la derivada parcial de $g(x_{t-1},h^2_t,\beta)$ con respecto a h^2_t.

Este tipo de modelos puede ser muy apropiado para representar muchas teorías financieras en las que se supone que la rentabilidad depende del riesgo, medido por la varianza condicionada.

Una extensión del ARCH-M es el ARCH-M de parámetros cambiantes, TVP-ARCH-M, (**Chou, Engle y Kane, 1992**).

$$y_t=b_t h_t^2+e_t$$
$$b_t=b_{t-1}+v_t$$
$$h_t^2=\alpha_0+\alpha_1\eta_{t-1}^2+\alpha_2 h_{t-1}^2$$

donde, e_t y v_t son idd $N(0,h_t)$ y $N(0,\sigma^2)$, respectivamente, y están incorrelacionados. η_t aparece porque b_t y h^2_t son inobservables y no es más que,

$$\eta_t=y_t-E_{t-1}(y_t)=y_t-E_{t-1}(b_t)h_t^2=e_t+[b_t-E_{t-1}(b_t)]h_t^2$$

$E_{t-1}(b_t)$ es el predictor óptimo de b_t en t-1. Nótese que cuando h^2_t es observable las ecuaciones para y_t y b_t no son más que el modelo de regresión de parámetros cambiantes.

Modelos Vectoriales o Multivariantes

Muchos de los problemas teóricos financieros no pueden ser analizados de forma univariante. En este sentido, los modelos vectoriales o multivariantes se han desarrollado para explicar la variación simultánea de las varianzas heterocedasticas de diversas variables.

En el modelo Multivariante o ARCH Vectorial existe una representación para ε_t igual a un vector Nx1 de procesos estocásticos. Así,

$$\varepsilon_t=z_t\,\Omega^{-1/2}_t \text{ con } z_t, \text{ i.i.d., } E(z_t)=0 \text{ y } VAR(z_t)=I.$$

Ω_t es una matriz NxN de varianzas-covarianzas semidefinida positiva y medible con respecto al conjunto de información en el periodo t-1.

En el modelo Multivariante ARCH(q) (**Kraft y Engle, 1983**) Ω_t está definida por una función lineal entre los productos cruzados de los errores pasados contemporáneos.

$$vech(\Omega_t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_i vech(\varepsilon_{t-i}\varepsilon'_{t-i})$$

donde vech(ε_{t-i} ε'_{t-i}) es el operador que permite transformar la submatriz diagonal inferior del una matriz NxM en un vector (N(N+1)/2)x1, ω es un vector (N(N+1)/2)x1, y A_i es una matriz de orden (N(N+1/2)x(N(N+1)/2).

El modelo ARCH multivariante puede ampliarse a un modelo GARCH(p,q) Multivariante (**Bollerslev, Engle and Wooldridge, 1988**) del tipo

$$vech(\Omega_t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_i vech(\varepsilon_{t-i}\varepsilon'_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p} B_i vech(\Omega_{t-i})$$

que introduce un sumatorio con los términos en vech(Ω_{t-i}) y un término B_i que es una matriz de orden (N(N+1/2)x(N(N+1)/2).

Obsérvese que en este modelo hay 1/2N(N+1)[1+N(N+1)(p+q)/2] parámetros, por lo que incluso para N pequeños deben imponerse restriciones. En este sentido se han desarrollado los ARCH Factoriales (**Engle (1987), Engle, NG y Rothschild (1990), Diebold y Nerlove (1989)**) en los que se incluyen factores latentes no observables. Estos factores pueden estar motivados por una aparente comunalidad en las agrupaciones de las volatilidadades entre las diferentes variables.

En estos modelos la matriz de varianzas condicionadas Ω_t está expresado por una combinación lineal de $\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i}'$ y Ω_{t-i}

$$\Omega_t=\nu+\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} a_{ik}^2\ g_k\ f_k'\ \varepsilon_{t-i}\ \varepsilon_{t-i}'\ f_k\ g_k'+\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} b_{ik}^2\ g_k\ f_k'\ \Omega_{t-i}\ f_k\ g_k'$$

a_{ik}, b_{ik} son escalares constantes, g_k y f_k son vectores Nx1 con las propiedades de que $f_k'g_k=1$ y $f_kg_j=0$ para k distinto de j.

Así, la representación GARCH para los k factores sugerida por **Engle (1987)**

$$vech(\Omega_t)=W-\sum_{k=1}^{K} vech(g_kg_k')+\sum_{k=1}^{K} vech(f_kf_k')\,h_{kt}^2$$

donde, W=vech(v) y h^2_{kt}

$$h_{kt}^2=w_k+\sum_{i=1}^{q} a_{ik}^2(f_k'\varepsilon_{t-i})^2+\sum_{i=1}^{p} b_{ik}^2h_{kt-i}^2$$

Modelo Estructural de Series Temporales con errores ARCH (STARCH)

Este modelo propuesto por **Harvey, Ruiz y Sentana (1992)** parte de la idea de que los errores que se obtienen del modelo estructural de series temporales básico, BSM, (**Harvey, 1989**) tienen una conducta heteroscedástica y modelizable mediante la representación ARCH.

Este modelo, como los modelos estructurales de series temporales univariantes, puede ser expresado en forma de espacio de estados. La ecuación de observación o medida es,

$$y_t = Z_t\alpha_t + X_t\beta + \Lambda\varepsilon_t + \varepsilon_t^*$$

donde, α_t es un vector de estado mx1; modelizable según la siguiente ecuación de transición. Ésta determina al vector de estado impícito en la ecuación anterior,

$$\alpha_t = T_t\alpha_{t-1} + \psi\eta_t + \eta_t^*$$

Z_t y T_t son matrices NxM y MxM, respectivamente, que pueden ser no estocásticas, X_t es una matriz NxK de variables observables, β es un vector Kx1, ε^*_t y η^*_t, que se distribuyen NID(0,H^*_t) y NID(0,Q^*_t), respectivamente, y están incorrelacionados.

El efecto ARCH se introduce como un modelo lineal para las perturbaciones ε_t y η_t. Las ecuaciones para el modelo de varianza heterocedástica se concretan en,

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$$

para el error de la primera ecuación del modelo estructural, y,

$$q_t = \gamma_0 + \gamma_1\eta_{t-1}^2$$

para el modelo de la ecuación de estado. Evidentemente, ε_t, ε^*_t, η_t y η^*_t son mutuamente independientes. Si se eliminase ε_t y η_t se tiene el modelo lineal de espacios de estados estándard.

Las perturbaciones ε_t están serialmente incorrelacionadas, poseen media nula y varianza $\alpha_0/(1-\alpha_1)$ con $\alpha_0>0$ y $0<\alpha_1<1$. Además,las perturbaciones

$$\Lambda\varepsilon_t + \varepsilon_t^*$$

son ruido blanco multivariante con matriz de covarianzas

$$\frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)}\Lambda\Lambda'+H_t^*$$

Además, η_t está serialmente incorrelacionado, con media nula y varianza $\gamma_0/(1-\gamma_1)$ con $\gamma_0>0$ y $0<\gamma_1<1$, y con

$$\psi\eta_t+\eta_t^\circ$$

que también es ruido blanco multivariante.

Por ejemplo, en el modelo estructural más simple donde

$$y_t=\mu_t+\varepsilon_t$$

$$\mu_t=\mu_{t-1}+\eta_t$$

donde y_t es la serie temporal, ε_t y η_t son ruido blanco y ecuación de transición

$$\alpha_t^*=\begin{bmatrix}\mu_t\\ \eta_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{t-1}\\ \eta_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\eta_t$$

3.2.- MODELOS NO LINEALES PARA LA VARIANZA HETEROSCEDASTICA

Hipótesis de la Forma Funcional

Una segunda linea de investigación sobre los modelos ARCH considera la forma funcional de la varianza condicionada, h^2_t, distinta de la especificación lineal inicialmente propuesta. **Engle (1982), Engle y Bollerslev (1986), Geweke (1986)** y **Pantula (1986)** han sugerido otras formas funcionales alternativas que intentan especificar una mejor conducta de los movimientos de la varianza condicionada en el tiempo.

Higgins y Bera (1990) señalan que la especificación de un función correcta para la varianza condicionada resulta bastante importante, porque la precisión de los intervalos de confianza depende de la selección correcta de una función que relacione las varianzas futuras con el conjunto de información, y, porque la precisión de los contrastes que se utilizan para detectar la existencia de procesos de varianza heterocedástica se determina parcialmente por la forma funcional que se elija para la misma. Así, una forma funcional incorrecta para los errores obtenidos de la estimación de cualquier modelo de regresión, puede conducir a resultados inconsistentes en las estimaciones de los parámetros. Estos modelos no lineales pueden resumirse en dos grandes grupos según el tipo de estimación realizada, estimación paramétrica y estimación no paramétrica.

1.- MODELOS NO LINEALES Y ESTIMACION PARAMETRICA

Estos modelos se caracterizan porque en los procesos de estimación de los parámetros del modelo se utilizan distribuciones de densidad condicionadas paramétricas (normal condicionada, t-Student, etc.).

Modelos ARCH exponenciales y de valor absoluto.

Los modelos ARCH no lineales ya habían sido propuestos por **Engle (1982**, pp 993). Éste propone el siguiente modelo exponencial:

$$h_t^2=\exp(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+.....+\alpha_p\varepsilon_{t-p}^2)$$

en el que la varianza es positiva para todos los valores de α. Sin embargo los datos generados por este tipo de proceso pueden implicar una varianza infinita dificultando la estimación y la inferencia.

Como alternativa se ha propuesto el modelo de valor absoluto,

$$h_t^2=\alpha_0+\alpha_1|\varepsilon_{t-1}|+.....+\alpha_p|\varepsilon_{t-p}|$$

en el que los parámetros de la varianza, α, son positivos, $\alpha>0$, aunque a diferencia del modelo anterior la varianza es finita.

Modelo Logarítmico (log-ARCH)

Adicionalmente, y en un intento de resolver los problemas ocasionados por el incumplimiento de la hipótesis de no-negatividad en el modelo ARCH, **Geweke (1986)** y **Pantula (1986)** sugieren una forma funcional alternativa a las propuestas por **Engle (1982)**, asegurando una varianza condicionada positiva y finita para todo el espacio paramétrico de α. Formalmente,

$$\log(h_t^2)=\alpha_0+\alpha_1\log(\varepsilon_{t-1}^2)+.....+\alpha_p\log(\varepsilon_{t-p}^2)$$

Modelo ARCH Exponencial Generalizado (EGARCH)

Otra forma funcional que está dentro de las especificaciones no lineales es el modelo Exponencial ARCH Generalizado de orden (p,q), o EGARCH (p,q), propuesto por **Nelson (1990c)**,

$$\log h_t^2 = \alpha + \frac{(1+\psi_1 L + \ldots + \psi_q L^q)}{(1-\Delta_1 L - \ldots - \Delta_p L^p)} \, g\,(z_{t-1})$$

en el que

$$g(z_t) \equiv \theta z_t + \gamma[|z_t| - E|z_t|]$$

sustituyendo en la ecuación en logaritmos

$$\log h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, [\theta z_{t-i} + \gamma[|z_t| - E|z_t|]\,] + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \log h_{t-i}^2$$

De forma alternativa (**Geweke, 1986** y **Pantula, 1986**)

$$\log(h_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \log(z_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i [\log(z_{t-i}^2) - \log(h_{t-i}^2)]$$

A diferencia del GARCH(p,q) este modelo no necesita restricciones en los parámetros para asegurar la no negatividad de la varianza condicionada. Por otra parte, obsérvese que en este modelo h^2_t es una función asimétrica de los valores pasados de ε_t. Es decir, la varianza no sólo depende de la magnitud sino también del signo de los shocks. De hecho este fenómeno de 'apalancamiento' se puede observar con cierta frecuencia en el comportamiento de los mercados de acciones.

Modelo no Lineal ARCH (NARCH)

Un modelo que contiene muchos de los propuestos en la literatura es el desarrollado por **Higgins y Bera (1990)**. El planteamiento de su modelo se centra en el desarrollo para la varianza condicionada de una función similar a la que se conoce por la teoría económica como función CES o de Elasticidad Constante de Sustitución, que comprende, como casos particulares, a las funciones de producción más conocidas como la función de Leontieff, la función de Cobb-Douglas o funciones de tipo lineal,

$$h_t^2=[\phi_0(\sigma^2)^{\delta}+\phi_1(\varepsilon_{t-1}^2)^{\delta}+.....+\phi_p(\varepsilon_{t-p}^2)^{\delta}]^{\frac{1}{\delta}}$$

$\sigma^2>0$, $\phi_i>0$ y $0<\delta<1$ para i=0,1,......p, y, $\Sigma\,\phi_i=1$

El NARCH(p) es una especificación bastante flexible, y puede reescribirse como,

$$\frac{h_t^{2\delta-1}}{\delta}=\phi_0\frac{(\sigma^2)^{\delta-1}}{\delta}+\phi_1\frac{(\varepsilon_{t-1}^2)^{\delta-1}}{\delta}+.....+\phi_p\frac{(\varepsilon_{t-p}^2)^{\delta-1}}{\delta}$$

que no es más que una transformación tipo **Box-Cox (1964)**. Así cuando $\delta=1$ el modelo para la varianza condicionada deviene lineal y cuando $\delta\rightarrow0$ el modelo es logarítmico,

$$\log(h_t^2)=\phi_0+\phi_1\log(\varepsilon_{t-1}^2)+.....+\phi_p\log(\varepsilon_{t-p}^2)$$

La varianza del modelo NARCH(1) es finita siempre que,

$$\phi_1(\pi^{-\frac{1}{2}})(2^{\delta})\Gamma[\frac{\delta+1}{2}]<1$$

donde Γ (.) es la función Gamma.

El modelo propuesto por **Higgins y Bera** (**1990**) fue propuesto para predecir el comportamiento futuro de varios tipos de cambio con respecto al dólar. Si bien las predicciones puntuales obtenidas por este modelo son similares a las obtenidas por otros modelos más sencillos, las predicciones por intervalo son mucho más precisas en el caso del NARCH, por lo que parece que este modelo capture más óptimamente los movimientos en el tiempo de la varianza condicionada.

2.- MODELOS NO LINEALES Y ESTIMACION NO PARAMETRICA

En estos modelos la estimación de los parámetros se realiza con funciones de densidad no paramétricas, generalmente aproximaciones polinomiales y expansiones trigonométricas, que evitan la utilización de la hipótesis de normalidad condicionada para la distribución de los resíduos del modelo de regresión o serie temporal.

Pagan y Schwert (**1990**), basándose en **Gallant** (**1981**), analizan una alternativa no paramétrica en la cual especifican la varianza condicionada utilizando un desarrollo en serie.

$$h_t^2=\sigma^2+\sum_{j=1}^{L}\left[(\alpha_j z_{tj}+\beta_j z_{tj}^2)+\sum_{k=1}^{2}(\gamma_{jk}\cos(kz_{tj})+\delta_{jk}\sin(kz_{tj}))\right]$$

h^2_t se aproxima por una función polinomial y por términos trigonométricos de los errores estimados, $z_{tj}=\varepsilon_{t-j}$.

Como alternativa **Pagan y Schwert (1990)** utilizan también funciones de kernel para aproximar el proceso lineal discreto que modeliza la varianza condicionada. En concreto

$$h_t^2=\sum_{j=1}^{T} \omega_{jt}\ \varepsilon_j^2 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{T} \omega_{jt}=1$$

en esta expresión ω_{jt} son ponderaciones construidas recurriendo a funciones de kernel,

$$\omega_{jt}=\frac{K(z_t-z_j)}{\sum_{k=1}^{T} K(z_k-z_t)}$$

K son funciones de Kernel caracterizadas por ser no nulas, simétricas e integrables.

Hipótesis de Normalidad Condicionada

Como vimos, la distribución condicionada de las observaciones generadas a partir de los modelos ARCH es frecuentemente asimétrica y leptocúrtica (es decir, más apuntada que la distribución normal teórica). Sin embargo, aunque es frecuente que los resíduos estandarizados de los modelos estimados, $z_t=\varepsilon_t/ht$, tengan elevados grados de leptocurtosis, si la varianza está correctamente especificada los excesos de curtosis no pueden exceder a los de los resíduos sin estandarizar (**Hsieh, 1989**).

Para eliminar el elevado grado de leptocurtosis de las distribuciones empíricas se han propuesto, alternativamente, distribuciones condicionadas con colas más gruesas que la distribución normal: la distribución de densidad t-Student (**Bollerslev, 1987**), la distribución normal-log-normal en **Hsieh** (**1989**), o la exponencial generalizada en **Nelson** (**1990c**), entre otros. También existen aproximaciones de distribuciones de densidad semiparamétricas en las que se utilizan expansiones polinomiales (**Bollerslev, Chou y Kroner**, **1992**).

4.- ESTIMACIÓN

Los parámetros de un modelo ARCH se pueden estimar por el método de Máxima Verosimilitud (**Engle** (**1982**)), el Método Generalizado de los Momentos (MGM) (**Mark** (**1988**)), o por métodos de inferencia bayesiana (**Geweke** (**1989**)). Particularmente, el estimador utilizado por **Engle** (**1982**) es el Máximo Verosímil, que es asintóticamente superior a los MCO, los cuales no alcanzan la cota de Cramer-Rao.

En los modelos para la varianza heterocedástica condicionada el logaritmo de la función de verosimilitud se construye bajo el supuesto de normalidad condicionada del error. Sea L(α) es el logaritmo de la función de verosimilitud para el vector de parámetros α y todos los valores de ε^2_t ($\varepsilon^2_1,\ldots,\varepsilon^2_T$); l_t el logaritmo de la función de verosimilitud para la t-ésima observación, entonces

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{l_t(\boldsymbol{\alpha})}{T} = -\frac{1}{2T}\sum_{t=1}^{T} [\log h_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}]$$

ε_t/h_t es z_t, los residuos estandarizados.

Para estimar α se maximiza dicha expresión. Las condiciones de primer orden son,

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha} = \frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha}\left[\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1\right]$$

y la segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = \frac{-1}{2h_t^4}\frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha'}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} + [\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1]\frac{\partial}{\partial \alpha'}[\frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha}]$$

En general los parámetros se suelen estimar eficientemente recurriendo a algún algoritmo iterativo tipo scoring. La i-ésima iteración de este algoritmo puede escribirse como,

$$\alpha^{(i+1)} = \alpha^{(i)} + (z'z)^{-1} z f^{(i)}$$

donde,

$$z_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-p}^2) / h_t^{2^{(i)}}$$

$$z' = (z_1', \ldots, z_T')$$

y f es el cociente entre la diferencia entre los errores ε_t^2 y h_t^2 y los valores de h_t^2.

$$f_t^{(i)} = (\varepsilon_t^2 - h_t^{2^{(i)}}) / h_t^{2^{(i)}}$$

$$f^{(i)\prime} = (f_1^{(i)}, \ldots, f_T^{(i)})$$

donde i expresa el número de iteraciones hasta que el parámetro maximice la función de verosimilitud. La ventaja de este algoritmo es que sólo necesita para su cálculo de las primeras derivadas de la función de verosimilitud, establecidas por las condiciones de primer orden.

Diversos autores señalan problemas de convergencia en la estimación máximo verosímil utilizando este tipo de algoritmos. Alternativamente, se han propuesto o bien utilizar otros métodos de estimación (**Mark** (**1988**) **Geweke**, (**1989**)) o bien otros algoritmos de optimización numérica (**Novales**, **1993**).

La estimación de los parámetros de un GARCH(p,q) se realiza también por máxima verosimilitud, con la misma forma para el logaritmo de la función de verosimilitud,

$$L_t(\theta)=\sum_{t=1}^{T}\frac{l_t\ (\theta)}{T}=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log(h_t^2)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2})$$

donde,

$$\frac{\partial l_t}{\partial\omega}=\frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial\omega}(\frac{\varepsilon^2}{h_t^2}-1)$$

$$\frac{\partial h_t^2}{\partial\omega}=z_t+\sum_{i=1}^{p}\beta_i\frac{\partial h_{t-i}^2}{\partial\omega}$$

Se suele utilizar el algoritmo de **Berndt, Hall, Hall y Hausman**, BHHH, (**1974**). Sea $\theta^{(i)}$ la estimación de los parámetros después de la estimación i-ésima, $\theta^{(i+1)}$ es calculado recursivamente como,

$$\theta^{(i+1)}=\theta^{(i)}+\lambda_i(\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial l_t}{\partial\theta}\frac{\partial l_t}{\partial\theta'})^{-1}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial l_t}{\partial\theta}$$

siendo, λ_i una variable de longitud de paso que se aplica a cada iteración y qe posibilita una rápida convergencia.

El mismo algoritmo se utiliza en los modelos ARCH multivariantes, en los que la función de verosimilitud que se trata de maximizar se expresa,

$$L(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{T}\left[\log f(\varepsilon_t\Omega_t^{-\frac{1}{2}})-\log|\Omega_t^{-\frac{1}{2}}|\right]$$

en la que (-log h_t) se ha sustituido por (-log | Ω_t |), mientras que ($\varepsilon_t\Omega_t$) sustituye a ($\varepsilon_t h_t$).

El modelo STARCH se estima por máxima verosimilitud utilizando el Filtro de Kalman, al igual que en el modelo estructural básico propuesto por **Harvey (1989)**. En este caso, el filtro de Kalman añade a la estimación los parámetros del ARCH(1) para ε_t y η_t, es decir,

$$y_t=Z_t\boldsymbol{\alpha}_t+X_t\boldsymbol{\beta}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_t^*=[Z_t 0 \Lambda_t]\,\boldsymbol{\alpha}_t^*+X_t\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}_t^*$$

con la ecuación de transición

$$\boldsymbol{\alpha}_t^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_t\\ \eta_t\\ \boldsymbol{\varepsilon}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{t-1}\\ \eta_{t-1}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}I & \psi & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_t^*\\ \eta_t\\ \boldsymbol{\varepsilon}_t\end{bmatrix}$$

A diferencia de los modelos anteriores la matriz de información obtenida bajo la hipótesis de normalidad condicionada de los modelos ARCH-M y EGARCH no es diagonal en bloques con respecto a los parámetros de la media y la varianza condicional. Esto significa que en estos modelos la estimación de los parámetros no puede realizarse independientemente. Así, la estimación consistente de los parámetros requiere la correcta especificación del modelo completo (para la media y para la varianza).

Bollerslev y Wooldridge (1991) proponen un método de estimación cuasi máximo verosímil en la que, en analogía a White, pretenden obtener una estimación consistente y robusta asintóticamente de la matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros de un modelo ARCH.

El estimador cuasi máximo verosímil θ_t se obtiene maximizando el logaritmo de la siguiente función de verosimilitud L_t,

$$L_t(\theta)=\sum_{t=1}^{T} l_t(\theta)=-\frac{1}{2}\log|\Omega(\theta)|-\frac{1}{2}\varepsilon_t(\theta)'\Omega_t^{-1}\varepsilon_t(\theta)$$

Ω_t es la matriz de varianzas y covarianzas de las variables exógenas en un modelo de regresión $y_t=x_t\theta+\varepsilon_t$, siendo y_t un vector de kx1 observaciones de la variable dependiente, x_t un vector de variables predeterminadas y ε_t un vector kx1 de resíduos.

La matriz obtenida por **Bollerlev y Wooldridge (1991)** puede ser representada como

$$\hat{A}_T^{-1}\hat{B}_T\hat{A}_T^{-1}$$

siendo las matrices A y B

$$\hat{A}_T\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_t(\hat{\theta}_T)$$

$$\hat{B}_T\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} s_t(\hat{\theta}_T)'s_t(\hat{\theta}_T)$$

las cuales dependen de $E[y_t/x_t]=v_t(x_t,\theta)$, $V[y_t/x_t]=\Omega_t(x_t,\theta)$; $\varepsilon_t(y_t,x_t,\Omega)=y_t-v_t(x_t,\theta)$ es un vector kx1 de resíduos, y

$$\frac{\partial \mu_t(\theta)}{\partial \theta} = \nabla_\theta \mu_t(\theta)$$
$$\frac{\partial \Omega_t(\theta)}{\partial \theta} = \nabla_\theta \Omega_t(\theta)$$

son matrices de derivadas parciales de orden Kxp y K²xp, respectivamente, tal que,

$$a_t(\theta) = \nabla_\theta \mu_t(\theta)' \Omega_t^{-1}(\theta) \nabla_\theta \mu_t(\theta) + \frac{1}{2} \nabla_\theta \Omega_t(\theta)' \\ [\Omega_t^{-1}(\theta) \otimes \Omega_t^{-1}(\theta)] \nabla_\theta \Omega_t(\theta)$$

es la matriz de información condicionada, de orden pxp, simétrica y positiva, y donde,

$$s_t(\theta)' = \nabla_\theta \mu_t(\theta)' \Omega_t^{-1}(\theta) \nabla_\theta \mu_t(\theta) + \frac{1}{2} \nabla_\theta \Omega_t(\theta)' \\ [\Omega_t^{-1}(\theta) \otimes \Omega_t^{-1}(\theta)] \nabla_\theta \Omega_t(\theta) \, vech[\varepsilon_t(\theta) \varepsilon_t(\theta)' - \Omega_t(\theta)]$$

es un vector 1xp.

Para funciones de distribución condicionales no normales se debe redefinir la función de verosimilitud. En este sentido, por ejemplo, se pueden utilizar las distribuciones del error generalizadas, GED, (**Box y Tiao, 1975**). Las GED no son una distribución sino una familia de distribuciones, incluyendo distribuciones más leptocúrticas y más platicúrticas que la distribución normal. En realidad la GED es una mezcla de distribuciones normales (**Hsu, 1982**). El logaritmo de la función de verosimilitud de una GED queda definido por,

$$L = tLnd(\nu) - \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{2} Lnh_t^2 + c(\nu)\, z_t^{\frac{2}{1+\nu}} \right) \quad -1 < \nu < \infty$$

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{h_t}$$

$$d(\nu) = \left[\Gamma\left(\frac{3(1+\nu)}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} (1+\nu)^{-1} \left[\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$c(\nu) = \left[\Gamma\left(\frac{3(1+\nu)}{2}\right)\right]^{\frac{1}{1+\nu}} \left[\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{1+\nu}}$$

$\Gamma(.)$ es la función gamma. Cuando $\nu=0$ z_t sigue una distribución normal estándar, y si $\nu>0(\nu<0)$ la distribución tiene colas más gruesas (delgadas) que la normal. $\nu=1$, por ejemplo, se corresponde con la distribución doble exponencial.

5.- IDENTIFICACIÓN Y CONTRASTE DE UN MODELO ARCH

la existencia de un proceso ARCH(1) incrementa los errores estándar de las estimaciones de las autocorrelaciones muestrales. En concreto los errores estándar asintóticos serán

$$\frac{1+2\alpha_1}{\sqrt{T}}$$

mayores que los errores estándar de un proceso homocedástico ($T^{-1/2}$) (**Weiss, 1984**). **Milhφj (1990)** demuestra que esta diferencia provoca una pérdida en la potencia de los contrastes.

Así pues, cuando existe un esquema ARCH se debe obrar con cautela, a la hora de identificar a través de la FAS y FAP de ε^2_t, puesto que al incrementarse los errores estándar las bandas utilizadas tradicionalmente no son las correctas.

Puesto que las herramientas tradicionales, FAS y FAP de ε^2_t, no sirven para discernir la presencia y el orden de un modelo ARCH se han propuesto otros contrastes alternativos. La hipótesis nula que se trata de contrastar es la existencia de homoscedasticidad frente a la existencia de heteroscedasticidad de orden p, o ARCH(p).

Los contrastes tradicionalmente utilizados para verificar la existencia de modelos con varianza condicionada están basados en los Multiplicadores de Lagrange (ML), que pueden expresarse de forma asintóticamente equivalente como

$$\xi=Tf'z(z'z)^{-1}z^{-1}f/f'f=TR^2$$

donde R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión de f sobre z. Como al añadir una constante y multiplicando por un escalar el R^2 de una regresión no se modifica, el R^2 anterior lo es también de la regresión de ε^2_t sobre una constante y los p valores retardados de ε^2_t.

Por ejemplo, en un ARCH(p)

$$h_t^2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2+\ldots\ldots+\alpha_p\varepsilon_{t-p}^2$$

la hipótesis nula a contrastar es

$$H_0\ :\ \alpha_1=\alpha_2=\ldots\ldots=\alpha_p=0$$

el estadístico a utilizar es,

$$TR^2\sim\chi_p^2$$

siendo R^2 el coeficiente de determinación de la regresión. El estadístico se distribuye asintóticamente como una χ^2 con p grados de libertad, cuando la hipótesis nula es cierta.

La identificación del modelo GARCH tiene los mismos problemas asociados al ARCH. En este caso, la función de autocovarianzas es

$$\gamma_k=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\ \gamma_{k-i}+\sum_{i1}^{p}\beta_i\ \gamma_{k-i}=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\ \gamma_{k-i}$$

donde, k>=p+1, m=max(p,q), $\varphi_i=\alpha_i+\beta_i$ con i=1,...,q. Así pues, la FAS es

$$\rho_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_0}=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\ \gamma_{k-i}\ ;\ n\geq p+1$$

En el contraste del modelo GARCH(p,q) se plantea la hipótesis nula es la no existencia del GARCH contra la alternativa de que exista. Nótese que la hipótesis nula puede contener raices del ARCH(p), es decir, $\alpha_i>0$, para i=1,.....,p.

Si se realiza una partición de la varianza condicionada, tal que,

$$h_t= Z_t'\omega\ =\ Z_1'\ \omega_1+\ Z_2'\ \omega_2$$

correspondiendo w_2 a la parte 'media móvil' del GARCH, entonces la hipótesis nula puede plantearse como

$$H_0\ :\ \omega_2=0$$

es decir,

$$H_0\ :\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_q,\beta_1,\ldots,\beta_p)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_q,0,\ldots,0)$$

Por tanto rechazar la hipótesis nula implica que se rechaza la existencia de que la varianza condicionada siga un proceso estocástico lineal discreto GARCH, pero no se puede asegurar que la varianza no sea heterocedástica, es decir la existencia de efectos ARCH.

Teniendo en cuenta esta limitación, el contraste de un modelo GARCH(p,q) está determinado por el siguiente estadístico definido a través de los Multiplicadores de Lagrange,

$$LM=\frac{1}{2}[f'Z\ (Z'Z\ )^{-1}Z'f\ ]$$

donde f es,

$$f=\left[\frac{\varepsilon_1^2}{h_1^2}-1,\ldots\ldots,\frac{\varepsilon_T^2}{h_T^2}-1\right]$$

y Z se es un vector formado por las derivadas parciales tal que

$$Z=\left[h_1^2\frac{\partial h_1^2}{\partial\omega},\ldots\ldots,h_T^2\frac{\partial h_T^2}{\partial\omega}\right]$$

que se distribuye como

$$TR^2\sim\chi_r^2$$

donde r es el número de elementos de ω_2.

La existencia de asimetrías (modelos tipo EGARCH) puede ser investigada examinando el comportamiento de los residuos estandarizados de la estimación de modelos lineales. A este fin, **Engle y Ng (1991)** proponen tres sencillos contrastes. Con el contraste de 'sesgo de signo' se evaluan los efectos de las innovaciones positivas y negativas sobre la volatilidad. Sea S^-_{t-1} es una variable ficticia con valor igual a 1 cuando ε_{t-1} es negativo y 0 en otro caso, el estadístico de 'sesgo de signo' no es más que la t de Student en la siguiente regresión:

$$z^2_t = a + bS^-_{t-1} + u_t$$

donde z_t son los resíduos estandarizados. Los contrastes de 'sesgo de signo positivo (negativo)' evaluan el diferente impacto que las sorpresas grandes positivas (negativas) tienen sobre la volatilidad.

$$z^2_t = a + bS^-_{t-1}\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$$z^2_t = a + bS^+_{t-1}\varepsilon_{t-1} + u_t$$

Finalmente, se pueden contrastar conjuntamente los tres efectos a través de una F,

$$z^2_t = a + b_1S^-_{t-1} + b_2S^-_{t-1}\varepsilon_{t-1} + b_3S^+_{t-1}\varepsilon_{t-1} + u_t$$

BIBLIOGRAFIA

Berndt,E.K., Hall,B.H., Hall,R.E. and Hausman,J.A. (1974): "Estimation Inference in Nonlinear Structural Models". Annals of Economic and Social Measurement, 4, 653-665.

Bera, A.K. and Higgins, M.L. (1992): "A Survey of ARCH Models: Properties, Estimation and Testing", University of Illinois at Urbana-Champaign

Bollerslev,T. (1986): " Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity ". Journal of Econometrics, 31, 307-327.

Bollerslev,T. (1987): " A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return". Review of Economics and Statistics, 69, 542-547.

Bollerslev,T. and Wooldridge,J.M. (1991): "Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Covariances" Econometrics Reviews.

Bollerslev,T, Chou,R.Y.and Kroner,K.F. (1992): " ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence". Journal of Econometrics, 52, 5-59.

Bollerslev,T., Engle,R.F. and Wooldridge,J.M. (1988): "A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances", Journal of Political Economy, 96, 116-131.

Box,G.E.P.and Cox,D.R. (1964): " An Analysis of Transformations". Journal of the Royal Statistical Society, Serie B, 26, 211-243.

Box,G.E.P. and Jenkins, G.M. (1976): Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco.

Box,G.E.P. and Tiao,G.C. (1975): Bayesian Inference in Statistical Analysis, Addison-Wesley, Reading, Ma.

Brock,W.A., Hsieh,D. and LeBaron,B. (1991): Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability, MIT Press, Cambridge.

Chou,R., Engle,R.F. and Kane,A. (1992): " Measuring Risk Aversion from Excess Returns on a Stock Index". Journal of Econometrics, 52, 201-224.

Diebold,F.X. and Nerlove,M. (1989): " The Dinamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor ARCH Model ". Journal of Applied Econometrics, 4, 1-21.

Engle.R.F. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of Variance of U.K. Inflation". Econometrica, 50, 987-1007.

Engle,R.F. (1987): "Multivariate GARCH with factor structure. Cointegration in Variance ", U.C.S.D. Department of Economics. Unpublished Manuscript.

Engle,R.F. and Bollerslev,T. (1986): "Modelling the Persistence of Conditional Variances". Econometric Reviews, 5, pp 1-50, 81-87.

Engle,R.F. and Ng V. (1991): "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility" Discussion Paper, University of California, San Diego.

Engle,R.F., Granger,C.W.J. and Kraft,D.F. (1984): "Combining Competing Forecasts of Inflation using a Bivariate ARCH model". Journal of Economics, Dynamics and Control, 8, 151-165.

Engle,R.F., Ng V. and Rothschild,M. (1986): "A Factor ARCH Model for Stock Returns", Unpublished manuscript. Department of Economics, University of California, San Diego.

Engle,R., Lilien,D.M.and Robins,R.P. (1987): "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model". Econometrica, 55, 391-407.

Gallant,A.R. (1981): "On a Bias in Flexible Function Forms and a Essentially Unbiased Form". Journal of Econometrics, 15, 211-244.

Geweke,J. (1986): "Modelling the Persistence of Conditional Variances: A Comment". Econometric Reviews, 5, 57-61.

Geweke,J. (1989): "Exact Predictive Densities in Linear Models with ARCH Disturbances". Journal of Econometrics, 44, 307-325.

Granger,C.W.J., Robins,R.P.and Engle,R.F. (1984): "Wholesale and Retail Prices: Bivariate Time Series Modelling with Forecastable Error Variances ". en **Belsley,D.A. and Kut,E.** eds, Model Reliability, MIT Press, Cambridge, 1-17.

Harvey,A.C. (1989): Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter. Cambridge University Press, Cambridge.

Harvey,A., Ruiz,E. and Sentana,E. (1992): "Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances". Journal of Econometrics, 52, 129-157.

Higgins,M.L. and Bera,A.K. (1990): "A Class of Nonlinear ARCH Models". Discussion Papers (Revised), University of California, San Diego, Department of Economics.

Hong,C.H. (1988): "The Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Model: The Process, Estimation and Monte Carlo Experiments". Discussion Paper. Department of Economics, University of California, San Diego.

Hsieh,D. (1989): "Modelling Heteroskedastic in Daily Foreign Exchange Rates". Journal and Business and Economic Statistics, 7, 307-317.

Kraft,D.F. and Engle,R. (1983): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series". Discussion Paper, Department of Economics, University of California.

Kunst,R.M. (1992): "Cointegrated ARCH Systems: Dinamic Patterns in Interest Rates". Institute for Advanced Studies. Viena.

Hsu,D. (1982): "A Bayesian Robust Detection of Shift in the Risk Structure of Stock Market Returns" Journal of the American Statistical Association, 77, 29-39.

Lamoreaux.G.C. and Lastrapes,W.D. (1990): "Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH model", Journal of Business and Economics Statistics, 8, 225-234.

Lumsdaine, R.L. (1.991): "Asymptotic Properties of the Maximun Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models". Discussion Paper, Department of Economics, Princeton.

Mark.N. (1988): "Time Varying Betas and Risk Premia in the Pricing of Forward Foreign Exchange Contracts". Journal of Financial Economics, 22, 335-354.

Milhφj,A. (1990): "Distribution of Empirical Autocorrelations of Squared First Order ARCH Process". Discussion Paper. Department of Statistics. University of Copenhagen.

Nelson,D.B. (1990a) : "ARCH Models as Diffusion Approximations" Journal of Econometrics, 45, 7-38.

Nelson,D.B. (1990b): "Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model" Econometric Theory, 6, 318-370.

Nelson,D.B. (1990c): "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". Econometrica, Vol.59, pp 347-370.

Nelson,D.B. (1992): "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH models: Getting the Right Variance with the Wrong Model". Journal of Econometrics, 52, 61-90.

Ng,V, Engle,R.F.and Rothschild,M. (1992) "A Multi-Dynamic-Factor Model for Stock Return". Journal of Econometrics, 52, 245-266.

Nijman,Th.E. and Palm,F.C. (1991): "Recent Developments in Modelling Volatility in Financial Data", Center Discussion Paper 9168, Tilburg University.

Novales, A. and Gracia-Diez,M. (1993): "Guía para la Estimación de Modelos ARCH', Estadística Española, 35, No 132, 5-38.

Pagan,A.R. and Schwert,G.W. (1990): "Alternative Models for Conditional Stock Volatility". Journal of Econometrics, 45, 267-290.

Pantula,S.G. (1986): "Modelling the Persistence of Conditional Variances: A Comment". Econometric Reviews, 5, 71-73.

Weiss,A.A. (1984): "ARMA Models with ARCH Errors ". Journal of Time Series Analysis, 5, 129-143.

Weiss,A.A. (1986): "Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing". Econometric Theory, 2, 107-131.

RECENT WORKING PAPERS

1. Albert Marcet and Ramon Marimon
Communication, Commitment and Growth. (June 1991)
[Published in *Journal of Economic Theory* Vol. 58, no. 2, (December 1992)]

2. Antoni Bosch
Economies of Scale, Location, Age and Sex Discrimination in Household Demand. (June 1991)
[Published in *European Economic Review* 35, (1991) 1589-1595]

3. Albert Satorra
Asymptotic Robust Inferences in the Analysis of Mean and Covariance Structures. (June 1991)
[Published in *Sociological Methodology* (1992), pp. 249-278, P.V. Marsden Edt. Basil Blackwell: Oxford & Cambridge, MA]

4. Javier Andrés and Jaume Garcia
Wage Determination in the Spanish Industry. (June 1991)
[Published as "Factores determinantes de los salarios: evidencia para la industria española" in J.J. Dolado et al. (eds.) *La industria y el comportamiento de las empresas españolas (Ensayos en homenaje a Gonzalo Mato)*, Chapter 6, pp. 171-196, Alianza Economia]

5. Albert Marcet
Solving Non-Linear Stochastic Models by Parameterizing Expectations: An Application to Asset Pricing with Production. (July 1991)

6. Albert Marcet
Simulation Analysis of Dynamic Stochastic Models: Applications to Theory and Estimation. (November 1991), 2d. version (March 1993)
[Published in *Advances in Econometrics* invited symposia of the Sixth World Congress of the Econometric Society (Eds. JJ. Laffont i C.A. Sims). Cambridge University Press (1994)]

7. Xavier Calsamiglia and Alan Kirman
A Unique Informationally Efficient and Decentralized Mechanism with Fair Outcomes. (November 1991)
[Published in *Econometrica*, vol. 61, 5, pp. 1147-1172 (1993)]

8. Albert Satorra
The Variance Matrix of Sample Second-order Moments in Multivariate Linear Relations. (January 1992)
[Published in *Statistics & Probability Letters* Vol. 15, no. 1, (1992), pp. 63-69]

9. Teresa Garcia-Milà and Therese J. McGuire
Industrial Mix as a Factor in the Growth and Variability of States'Economies. (January 1992)
[Forthcoming in *Regional Science and Urban Economics*]

10. Walter Garcia-Fontes and Hugo Hopenhayn
Entry Restrictions and the Determination of Quality. (February 1992)

11. Guillem López and Adam Robert Wagstaff
Indicadores de Eficiencia en el Sector Hospitalario. (March 1992)
[Published in *Moneda y Crédito* Vol. 196]

12. Daniel Serra and Charles ReVelle
The PQ-Median Problem: Location and Districting of Hierarchical Facilities. Part I (April 1992)
[Published in *Location Science*, Vol. 1, no. 4 (1993)]

13. Daniel Serra and Charles ReVelle
The PQ-Median Problem: Location and Districting of Hierarchical Facilities. Part II: Heuristic Solution Methods. (April 1992)
[Forthcoming in *Location Science*]

14. Juan Pablo Nicolini
Ruling out Speculative Hyperinflations: a Game Theoretic Approach. (April 1992)

15. Albert Marcet and Thomas J. Sargent
Speed of Convergence of Recursive Least Squares Learning with ARMA Perceptions. (May 1992)
[Forthcoming in *Learning and Rationality in Economics*]

16. Albert Satorra
Multi-Sample Analysis of Moment-Structures: Asymptotic Validity of Inferences Based on Second-Order Moments. (June 1992)
[Published in *Statistical Modelling and Latent Variables* Elsevier, North Holland. K.Haagen, D.J.Bartholomew and M. Deistler (eds.), pp. 283-298.]

Special issue Vernon L. Smith
Experimental Methods in Economics. (June 1992)

17. Albert Marcet and David A. Marshall
Convergence of Approximate Model Solutions to Rational Expectation Equilibria Using the Method of Parameterized Expectations.

18. M. Antònia Monés, Rafael Salas and Eva Ventura
Consumption, Real after Tax Interest Rates and Income Innovations. A Panel Data Analysis. (December 1992)

19. Hugo A. Hopenhayn and Ingrid M. Werner
Information, Liquidity and Asset Trading in a Random Matching Game. (February 1993)

20. Daniel Serra
The Coherent Covering Location Problem. (February 1993)
[Forthcoming in *Papers in Regional Science*]

21. Ramon Marimon, Stephen E. Spear and Shyam Sunder
Expectationally-driven Market Volatility: An Experimental Study. (March 1993)
[Forthcoming in *Journal of Economic Theory*]

22. Giorgia Giovannetti, Albert Marcet and Ramon Marimon
Growth, Capital Flows and Enforcement Constaints: The Case of Africa.
(March 1993)
[Published in *European Economic Review* 37, pp. 418-425 (1993)]

23. Ramon Marimon
Adaptive Learning, Evolutionary Dynamics and Equilibrium Selection in Games. (March 1993)
[Published in *European Economic Review* 37 (1993)]

24. Ramon Marimon and Ellen McGrattan
On Adaptive Learning in Strategic Games. (March 1993)
[Forthcoming in *A. Kirman and M. Salmon eds.*"Learning and Rationality in Economics" Basil Blackwell]

25. Ramon Marimon and Shyam Sunder
Indeterminacy of Equilibria in a Hyperinflationary World: Experimental Evidence. (March 1993)
[Forthcoming in *Econometrica*]

26. Jaume Garcia and José M. Labeaga
A Cross-Section Model with Zeros: an Application to the Demand for Tobacco. (March 1993)

27. Xavier Freixas
Short Term Credit Versus Account Receivable Financing. (March 1993)

28. Massimo Motta and George Norman
Does Economic Integration cause Foreign Direct Investment?
(March 1993)
[Published in *Working Paper University of Edinburgh* 1993:I]

29. Jeffrey Prisbrey
An Experimental Analysis of Two-Person Reciprocity Games.
(February 1993)
[Published in *Social Science Working Paper 787* (November 1992)]

30. Hugo A. Hopenhayn and Maria E. Muniagurria
Policy Variability and Economic Growth. (February 1993)

31. Eva Ventura Colera
A Note on Measurement Error and Euler Equations: an Alternative to Log-Linear Approximations. (March 1993)
[Published in *Economics Letters*, 45, pp. 305-308 (1994)]

32. Rafael Crespí i Cladera
Protecciones Anti-Opa y Concentración de la Propiedad: el Poder de Voto. (March 1993)

33. Hugo A. Hopenhayn
The Shakeout. (April 1993)

34. Walter Garcia-Fontes
Price Competition in Segmented Industries. (April 1993)

35. Albert Satorra i Brucart
On the Asymptotic Optimality of Alternative Minimum-Distance Estimators in Linear Latent-Variable Models. (February 1993)
[Published in *Econometric Theory*, 10, pp. 867-883]

36. Teresa Garcia-Milà, Therese J. McGuire and Robert H. Porter
The Effect of Public Capital in State-Level Production Functions Reconsidered. (February 1993)

37. Ramon Marimon and Shyam Sunder
Expectations and Learning Under Alternative Monetary Regimes: an Experimental Approach. (May 1993)

38. José M. Labeaga and Angel López
Tax Silumlations for Spain with a Flexible Demand System. (May 1993)

39. Daniel Serra and Charles ReVelle
Market Capture by Two Competitors: The Pre-Emptive Location Problem. (May 1993)
[Forthcoming in *Journal of Regional Science*]

40. Xavier Cuadras-Morató
Commodity Money in the Presence of Goods of Heterogenous Quality. (July 1993)
[Published in *Economic Theory* 4 (1994)]

41. M. Antònia Monés and Eva Ventura
Saving Decisions and Fiscal Incentives: A Spanish Panel Based Analysis. (July 1993)

42. Wouter J. den Haan and Albert Marcet
Accuracy in Simulations. (September 1993)
[Published in *Review of Economic Studies*, (1994)]

43. Jordi Galí
Local Externalities, Convex Adjustment Costs and Sunspot Equilibria. (September 1993)
[Forthcoming in *Journal of Economic Theory*]

44. Jordi Galí
Monopolistic Competition, Endogenous Markups, and Growth. (September 1993)
[Forthcoming in *European Economic Review*]

45. Jordi Galí
Monopolistic Competition, Business Cycles, and the Composition of Aggregate Demand. (October 1993)
[Forthcoming in *Journal of Economic Theory*]

46. Oriol Amat
The Relationship between Tax Regulations and Financial Accounting: a Comparison of Germany, Spain and the United Kingdom. (November 1993)
[Forthcoming in *European Management Journal*]

47. Diego Rodríguez and Dimitri Vayanos
Decentralization and the Management of Competition. (November 1993)

48. Diego Rodríguez and Thomas M. Stoker
A Regression Test of Semiparametric Index Model Speciication. (November 1993)

49. Oriol Amat and John Blake
Control of the Costs of Quality Management: a Review or Current Practice in Spain. (November 1993)

50. Jeffrey E. Prisbrey
A Bounded Rationality, Evolutionary Model for Behavior in Two Person Reciprocity Games. (November 1993)

51. Lisa Beth Tilis
Economic Applications of Genetic Algorithms as a Markov Process. (November 1993)

52. Ángel López
The Comand for Private Transport in Spain: A Microeconometric Approach. (December 1993)

53. Ángel López
An Assessment of the Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (1985-89) as a Source of Information for Applied Reseach. (December 1993)

54. Antonio Cabrales
Stochastic Replicator Dynamics. (December 1993)

55. Antonio Cabrales and Takeo Hoshi
Heterogeneous Beliefs, Wealth Accumulation, and Asset Price Dynamics. (February 1993, Revised: June 1993)

56. Juan Pablo Nicolini
More on the Time Inconsistency of Optimal Monetary Policy. (November 1993)

57. Lisa B. Tilis
Income Distribution and Growth: A Re-examination. (December 1993)

58. José María Marín Vigueras and Shinichi Suda
A Model of Financial Markets with Default and The Role of "Ex-ante" Redundant Assets. (January 1994)

59. Angel de la Fuente and José María Marín Vigueras
Innovation, "Bank" Monitoring and Endogenous Financial Development. (January 1994)

60. Jordi Galí
Expectations-Driven Spatial Fluctuations. (January 1994)

61. Josep M. Argilés
Survey on Commercial and Economic Collaboration Between Companies in the EEC and Former Eastern Bloc Countries. (February 1994)

62. German Rojas
Optimal Taxation in a Stochastic Growth Model with Public Capital: Crowding-in Effects and Stabilization Policy. (September 1993)

63. Irasema Alonso
Patterns of Exchange, Fiat Money, and the Welfare Costs of Inflation. (September 1993)

64. Rohit Rahi
Adverse Selection and Security Design. (February 1994)

65. Jordi Galí and Fabrizio Zilibotti
Endogenous Growth and Poverty Traps in a Cournotian Model. (November 1993)

66. Jordi Galí and Richard Clarida
Sources of Real Exchage Rate Fluctuations: How Important are Nominal Shocks?. (October 1993, Revised: January 1994)
[Forthcoming in *Carnegie-Rochester Conference in Public Policy*]

67. John Ireland
A DPP Evaluation of Efficiency Gains from Channel-Manufacturer Cooperation on Case Counts. (February 1994)

68. John Ireland
How Products' Case Volumes Influence Supermarket Shelf Space Allocations and Profits. (February 1994)

69. Fabrizio Zilibotti
Foreign Investments, Enforcement Constraints and Human Capital Accumulation. (February 1994)

70. Vladimir Marianov and Daniel Serra
Probabilistic Maximal Covering Location Models for Congested Systems. (March 1994)

71. Giorgia Giovannetti.
Import Pricing, Domestic Pricing and Market Structure. (August 1993, Revised: January 1994)

72. Raffaela Giordano.
A Model of Inflation and Reputation with Wage Bargaining. (November 1992, Revised March 1994)

73. Jaume Puig i Junoy.
Aspectos Macroeconómicos del Gasto Sanitario en el Proceso de Convergencia Europea. (Enero 1994)

74. Daniel Serra, Samuel Ratick and Charles ReVelle.
The Maximum Capture Problem with Uncertainty (March 1994)

75. Oriol Amat, John Blake and Jack Dowds.
Issues in the Use of the Cash Flow Statement-Experience in some Other Countries (March 1994)

76. Albert Marcet and David A. Marshall.
Solving Nonlinear Rational Expectations Models by Parameterized Expectations: Convergence to Stationary Solutions (March 1994)

77. Xavier Sala-i-Martin.
Lecture Notes on Economic Growth (I): Introduction to the Literature and Neoclassical Models (May 1994)

78. Xavier Sala-i-Martin.
Lecture Notes on Economic Growth (II): Five Prototype Models of Endogenous Growth (May 1994)

79. Xavier Sala-i-Martin.
Cross-Sectional Regressions and the Empirics of Economic Growth (May 1994)

80. Xavier Cuadras-Morató.
Perishable Medium of Exchange (Can Ice Cream be Money?) (May 1994)

81. Esther Martínez García.
Progresividad y Gastos Fiscales en la Imposición Personal sobre la Renta (Mayo 1994)

82. Robert J. Barro, N. Gregory Mankiw and Xavier Sala-i-Martin.
Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth (May 1994)

83. Sergi Jiménez-Martin.
The Wage Setting Process in Spain. Is it Really only about Wages? (April 1993, Revised: May 1994)

84. Robert J. Barro and Xavier Sala-i-Martin.
Quality Improvements in Models of Growth (June 1994)

85. Francesco Drudi and Raffaela Giordano.
Optimal Wage Indexation in a Reputational Model of Monetary Policy Credibility (February 1994)

86. Christian Helmenstein and Yury Yegorov.
The Dynamics of Migration in the Presence of Chains (June 1994)

87. Walter García-Fontes and Massimo Motta.
Quality of Professional Services under Price Floors. (June 1994)

88. Jose M. Bailen.
Basic Research, Product Innovation, and Growth. (September 1994)

89. Oriol Amat and John Blake and Julia Clarke.
Bank Financial Analyst's Response to Lease Capitalization in Spain (September 1994)

90. John Blake and Oriol Amat and Julia Clarke.
Management's Response to Finance Lease Capitalization in Spain (September 1994)

91. Antoni Bosch and Shyam Sunder.
Tracking the Invisible Hand: Convergence of Double Auctions to Competitive Equilibrium. (July 1994)

92. Sergi Jiménez-Martin.
The Wage Effect of an Indexation Clause: Evidence from Spanish Manufacturing Firms. (September 1994)

93. Albert Carreras and Xavier Tafunell.
National Enterprise. Spanish Big Manufacturing Firms (1917-1990), between State and Market (September 1994)

94. Ramon Faulí-Oller and Massimo Motta.
Why do Owners let their Managers Pay too much for their Acquisitions? (October 1994)

95. Marc Sáez Zafra and Jorge V. Pérez-Rodríguez.
Modelos Autorregresivos para la Varianza Condicionada Heteroscedástica (ARCH) (October 1994)