Una modelización de los años de vida ajustados por la calidad como utilidades esperadas*.

José María Abellán Perpiñán. (+)

Departamento de Economía Aplicada. Universidad de Murcia.

José Luis Pinto Prades. (#)

Departamento de Economía. Universidad Pompeu Fabra.

(+) Departamento de Economía Aplicada. Facultad de CC.EE. y Empresariales.Universidad de Murcia. Ronda de Levante 10. 30008 MURCIA. E-mail: dionisos@fcu.um.es

(#) Departamento de Economía. Universidad Pompeu Fabra. Ramon Trias Fargas, 25-27, 08005 Barcelona. E-mail: pinto_jose@econ.upf.es

Keywods: QALYs, Expected Utility, Medical Decision Making

Journal of Economic Literature classification: C93, H51, I18

(*) Expresamos nuestro agradecimiento a la Fundación BBV por haber publicado este trabajo como uno de sus documentos. También agradecemos al profesor Francisco Maeso todas sus observaciones y sugerencias.

RESUMEN

En el presente trabajo, los años de vida ajustados por la calidad (AVAC), son caracterizados como funciones de utilidad von Newman-Morgenstern. Esta caracterización se efectúa para dos problemas de elección: la elección entre loterías definidas sobre estados de salud crónicos y la elección entre loterías definidas sobre estados de salud temporales. En el primer caso, deducimos las mismas condiciones que Pliskin et al. (1980), sólo que siguiendo un camino más directo. En el segundo caso, una vez establecida una condición de independencia aditiva basada en Fishburn (1970), inferimos una nueva condición en la literatura sobre AVAC que denominamos condición de simetría.

La mejor salud tiene un límite; la enfermedad lo anda rondando siempre.

Esquilo (524-456 a.C.)

1.- Introducción.

Los AVAC (años de vida ajustados por la calidad) constituyen una de las aportaciones más fértiles de los dos últimos decenios en el ámbito de la toma de decisiones médicas. Su gran atractivo conceptual y la enorme simplicidad de su cálculo justifican el creciente número de aplicaciones empíricas que vienen sucediéndose desde la aportación inicial de Fanshel y Bush en 1970, aunque la denominación actual AVAC no se consolidaría definitivamente hasta siete años después, con el trabajo de Weinstein y Stason. Ese atractivo al que hacemos referencia reside fundamentalmente en que, a diferencia de otros indicadores del output sanitario como la esperanza de vida al nacer o la tasa de mortalidad, los AVAC incorporan en un único valor numérico no sólo la supervivencia o cantidad de vida sino también la morbilidad o calidad de vida. Es decir, los años de vida extra generados por todo tratamiento médico son ponderados en el modelo AVAC por la calidad de vida que llevan aparejados. En cuanto a la simplicidad de su cálculo, el modelo AVAC básico o convencional (como será denominado por nosotros) consiste sencillamente en el producto del número de años de vida ganados a consecuencia de cualquier tratamiento y la ponderación de la calidad de vida asociada. A lo largo de nuestra modelización, tanto las ponderaciones de la calidad de vida como los mismos AVAC serán caracterizados como funciones de utilidad esperada o funciones de utilidad von Newman-Morgenstern.

Para ilustrar el significado de los AVAC veamos un ejemplo. Supongamos que para tratar la insuficiencia renal crónica de un enfermo de cuarenta años disponemos de dos terapias alternativas. La primera consiste en un trasplante y la segunda en un programa de hemodiálisis hospitalaria. Independientemente del tratamiento escogido el enfermo disfrutará de la misma esperanza de vida, digamos 20 años. Ahora bien, mientras que el primer tratamiento le ofrece una salud casi normal, el estado de salud proporcionado por el segundo tratamiento estará marcado por frecuentes trastornos de todo tipo. Imaginemos que, por medio de algún procedimiento, conseguimos que este paciente revele sus verdaderas preferencias hacia cada estado de salud, obteniendo las siguientes utilidades normalizadas entre 0 (muerte) y 1 (salud normal): U(salud casi normal) = 0,9; U(salud con trastornos) = 0,5. Tal y como hemos explicado, el número de AVAC ganados por cada tratamiento será igual a $0,9 \times 20 = 18$ y a $0,5 \times 20 = 10$ respectivamente. Si tomamos como criterio de decisión a los AVAC ganados para elegir entre estos dos tratamientos, seleccionaríamos el primer tratamiento: el trasplante.

El ejemplo anterior es representativo de uno de los dos contextos en que pueden aplicarse los AVAC: la elección de programas de salud alternativos para el mismo paciente. El otro contexto sería el de la toma de decisiones colectivas. Es decir, emplear los AVAC como base para repartir recursos escasos entre distintos programas sanitarios que compiten entre sí. En este segundo contexto, los AVAC se ponen en relación con el coste de los tratamientos alternativos, siendo la ratio coste por AVAC ganado (o AVAC por unidad monetaria gastada) la unidad obtenida mediante la utilización de una técnica de evaluación económica llamada análisis coste-utilidad(1). En ocasiones se emplean indistintamente las denominaciones análisis coste-utilidad y análisis coste-efectividad, aunque la segunda, en puridad, no calcula utilidades sino que utiliza como medida de los beneficios sobre la salud algún resultado común a todos los programas que se estén evaluando. Alguno de estos resultados podrían ser, por ejemplo, los años de vida ganados, los días de estancia en el hospital ahorrados o el número de vidas salvadas.

De entre todas las investigaciones que, de una forma u otra, han intentado caracterizar a los AVAC como utilidades nosotros destacaríamos tres principalmente. Dos de ellas para el caso de estados de salud crónicos, y la tercera restante para el caso de estados de salud temporales. La primera, es el artículo ya clásico de Pliskin, Shepard y Weinstein del año 1980. Estos autores establecieron tres condiciones bajo las cuales el modelo básico de cálculo de los AVAC puede interpretarse como una función de utilidad von Newman-Morgenstern válida. Una característica fundamental de esta modelización es que los requisitos propuestos tan sólo son suficientes cuando se trata con estados de salud crónicos. Esto es, cuando la calidad de vida permanece inalterada a lo largo de todo el período de tiempo considerado. Recientemente, Bleichrodt (1996) demostró que, una vez aceptada una condición muy débil e intuitivamente reconocible en el contexto médico, estas tres condiciones derivadas por Pliskin, Shepard y Weinstein podían reducirse a tan sólo una de ellas: la neutralidad hacia el riesgo respecto de los años de vida. Ésta constituye la segunda aportación de las tres que mencionábamos. La tercera y última que vamos a considerar aquí pertenece también a Bleichrodt (1995). En este artículo, Bleichrodt infiere las condiciones más restrictivas que han de observar los AVAC para ser caracterizados como utilidades para el caso en que la calidad de vida varíe a lo largo del período de tiempo en cuestión. Esto es, para el caso en que trabajemos con estados de salud temporales.

El propósito del presente trabajo es derivar y examinar todas las condiciones que han de concurrir para que el modelo AVAC sea consistente con las preferencias individuales que satisfacen los axiomas de la teoría de la utilidad esperada. Para cumplir con este objetivo, el resto del trabajo es estructurado en las cuatro partes siguientes. Una primera parte donde se establece la notación y los supuestos estructurales de la modelización, comunes tanto al caso de estados de salud crónicos (calidad de vida constante) como al caso de estados de salud temporales (calidad de vida variable). Una segunda parte que describe las condiciones correspondientes a los estados de salud crónicos partiendo de la forma funcional cuasiaditiva propuesta por Keeney y Raiffa (1976) en el ámbito de la teoría de la utilidad multiatributo. Las condiciones que obtendremos en este apartado son idénticas a las derivadas por Pliskin et al. (1980) aunque el camino seguido es ligeramente diferente. A continuación, una tercera parte donde hacemos lo propio con los estados de salud temporales inspirándonos en un teorema de Fishburn (1970) basado en un supuesto de independencia para representaciones aditivas, aplicando una nueva condición en la literatura sobre AVAC que denominamos condición de simetría. Esta nueva condición - formalmente muy similar a la propiedad de simetría o anonimidad que se suele utilizar para caracterizar a las funciones de bienestar social - es, junto con la condición de independencia ya referida, equivalente a las tres condiciones derivadas por Bleichrodt (1995). Por último, en la cuarta y última parte, resumiremos los resultados más relevantes alcanzados a lo largo del presente documento y haremos una breve reflexión sobre la validez descriptiva y normativa del modelo AVAC.

2.- Notación y supuestos estructurales.

En primer lugar, vamos a caracterizar el problema de elección entre tratamientos alternativos en un entorno probabilístico o de riesgo. Esto se justifica reconociendo que las decisiones médicas son, básicamente, decisiones arriesgadas. Un entorno así puede describirse por medio de un conjunto de alternativas o cursos de acción $\{A_i:_{i=1,\dots,n}\}$; la serie de estados de la naturaleza o del mundo (sucesos ajenos al control del individuo) que pueden darse $\{q_j, ; _{j=1,...,s}\}$; las probabilidades[2] asociadas a cada uno de estos estados y, por último, el conjunto de consecuencias o resultados Q, producto del acto emprendido por el decisor y de la realización de un estado de la naturaleza en particular. Formalmente, una alternativa A_i es una función de $\{q_j\}$ a Q, especificando para cada estado q_j una consecuencia determinada. Al definir una medida de probabilidad sobre el espacio de estados del mundo, cada alternativa genera una lotería sobre Q.

(Cuadro 1)

El ejemplo representado en el cuadro 1 ilustra convenientemente el significado del riesgo en el contexto de la toma de decisiones médicas. Supongamos que, para curar cierta enfermedad grave, podemos elegir entre dos tratamientos alternativos: quirúrgico y farmacológico. Éstos configuran nuestro conjunto de elección. Para cada una de estas alternativas pueden producirse dos estados inciertos distintos: éxito o fracaso. Estos sucesos, en función del tratamiento seleccionado, determinan las consecuencias finales de la decisión con una determinada probabilidad de ocurrencia.

En segundo lugar, asumimos la teoría de la utilidad esperada formulada por John von Newman y Oskar Morgenstern (1953) como el marco conceptual en el que modelizar a los AVAC. Así ha sido reconocido en la literatura AVAC, tanto desde un punto de vista experimental (McNeil et al., 1978, 1981), como teórico (Pliskin et al., 1980; Miyamoto y Eraker 1985, 1988).

Ya estamos en condiciones de enunciar nuestros supuestos estructurales:

a) El tiempo de vida de cada individuo refleja un cierto perfil de salud, entendiendo ésta como un *continuo* que va de la muerte en un extremo a la salud perfecta en otro (Torrance 1976). Definimos Q como un conjunto finito de perfiles de salud, tal que:

$$Q=Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_T=\{(q_1,q_2,\ldots,q_T):q_t \in Q_t\}$$

Siendo q_t el nivel o resultado concreto que alcanza el estado de salud Q_t durante t=1,2,...T años seguidos por la muerte. Por ejemplo, q_t=(salud perfecta). Cada perfil de salud(3) podemos tomarlo como un *vector* $q \equiv (q_1,q_2,\ldots,q_T)$, o como un *escalar* $q \equiv (\bar{q},\bar{q},\ldots, \bar{q})$, donde $^-$ denota que q es constante. En caso de interpretar cada perfil de salud como un vector, éste viene definido por los niveles (variables) que alcanza el estado de salud en cada uno de los t años de vida. Si cada perfil es interpretado como un escalar, entonces se reduce a un par (q,t). En los dos casos, ignoramos las variaciones intra-anuales en la calidad de vida, es decir, el estado de salud puede variar de año en año, pero no a lo largo de un año dado (Pliskin et al., 1980).

b) Definimos *L* como un conjunto convexo(4) de distribuciones de probabilidad simples(5) (objetivas) sobre *Q*:

$L_Q = [\{l(q^i),q^i\}:i=1,2,...,m];$ siendo $l(q^i)$ una función tal $l(q^i):Q\rightarrow[0,1];$

$\sum l(q^i)=1,$ denotando i un perfil de salud específico.

L_Q es el espacio de "loterías" (incluidas las combinaciones convexas de probabilidades sobre las consecuencias, que llamaremos loterías compuestas). Este espacio cubre todo tipo de sucesos, tanto los inciertos (aquellos con probabilidad $0<l<1$) como los seguros (cuando $l=1$, para algún q^i, y $l=0$ para todas las demás consecuencias). En este último caso hablamos de loterías degeneradas.

c) Suponemos que existe una relación de preferencias $\succ$ definida sobre $\mathrm{L_Q}$ que cumple con los axiomas de la teoría de la utilidad esperada (los axiomas escogidos se encuentran en la nota A1 del apéndice). Si esto es así, entonces existe una función de utilidad $u:Q\rightarrow\Re_+$ tal que:

$$L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow \sum u(q^i)L(q^i) > \sum u(q^i)L'(q^i)$$

Siendo $u(.)$ única excepto para toda transformación afín positiva: $u(.)=a+bv(.)$, con $b>0$.

d) Como ya fuera advertido por Pliskin et al. (1980), estados de salud peores que la muerte vulneran la condición de independencia en la utilidad[(6)] . En consecuencia, asumimos que todos los estados de salud son preferidos a la muerte: $u(q_t)>0$, siendo $u(q^0)=0$.

e) El descuento de AVAC no está incorporado explícitamente en la presente modelización. Sin embargo, el descuento es una práctica habitual en las aplicaciones del análisis coste-utilidad. El argumento tradicional esgrimido en la literatura para justificar el descuento de los AVAC ganados en el futuro se ha basado en “razones de consistencia” (Olsen, J.A., 1993). Estas “razones” consisten fundamentalmente en destacar que descontar los costes y no hacer los propio con los beneficios (en este caso los AVAC) puede conducir a resultados inconsistentes o paradójicos (Weinstein y Stason, 1977; Keeler y Cretin, 1983; Torrance y Feeny, 1989). Ahora bien, más allá de los resultados perversos a los que se pueda llegar dejando los beneficios sobre la salud sin descontar, cuando los costes sí lo son a alguna tasa que se juzgue adecuada, la razón teórica de fondo para propugnar el descuento de los AVAC radica en la existencia de preferencias temporales (Gafni y Torrance, 1984; Gafni, 1995; Bleichrodt y Gafni, 1996). Diremos que un individuo posee una preferencia temporal positiva, si prefiere recibir cierta cantidad de un resultado favorable antes a recibir la misma cantidad de dicho resultado favorable, más tarde. En un modelo de utilidad descontado, las preferencias temporales vienen recogidas en la tasa de descuento; habitualmente asumida constante.

¿Deben descontarse los AVAC? La respuesta no está nada clara. La evidencia empírica disponible apunta hacia que el modelo de utilidad descontado fracasa al intentar modelizar las preferencias intertemporales. Además, parece imposible aislar el efecto "puro" del tiempo con independencia de otro tipo de efectos sobre las preferencias: los llamados *efectos secuencia* (Gafni, 1995).

3.- Modelización en el caso de estados de salud crónicos.

Como ya señalamos en la introducción, Pliskin et al. (1980) derivaron las condiciones que había que imponer a las preferencias individuales para el caso en que la calidad de vida del paciente no varía hasta su muerte, esto es, para estados de salud crónicos. Nosotros vamos a derivar esas mismas condiciones pero de una forma más directa a la empleada por Pliskin et al. (1980). Las diferencias fundamentales entre la vía seguida para derivar las citadas condiciones en su modelización y en la nuestra radican, en primer lugar, en que nosotros trabajamos desde el principio con el equivalente multiplicativo a la función cuasiaditiva definida por Keeney y Raiffa (1976) y ellos no y, en segundo lugar, a que Pliskin et al. sólo impusieron el supuesto de intercambio proporcionalmente constante para el mejor y peor estado de salud, extendiéndolo a todos los demás probada la independencia mutua entre utilidades, mientras que nosotros de partida se lo imponemos a todos los estados posibles.

A) Independencia mutua entre utilidades.

Cada tratamiento alternativo conduce a diversos resultados sobre la salud y el tiempo de vida. Si el perfil de salud es constante a lo largo del tiempo, cada resultado - noción común a) -viene dado por un par (q,t). Por ejemplo, (inmovilidad total, 5 años de vida,). Si imponemos la condición de independencia mutua entre la utilidad de (q) y la utilidad de (t) estamos afirmando que:

(a) La estructura de preferencias condicionales hacia loterías definidas sobre T dado q no dependen del nivel particular en que fijemos Q. Esto significa que T es independiente en la utilidad respecto de Q (Keeney y Raiffa, 1976).

(b) Q es independiente en la utilidad respecto de T.

Formalmente la independencia en la utilidad significa que (para el caso de sólo dos consecuencias por lotería):

$[(q^1, t'), l, (q^2, t')] \succ [(q^1, t'), l', (q^2, t')]\ \hat{U}\ [(q^1, t''), l, (q^2, t'')] \succ [(q^1, t''), l', (q^2, t'')],$

" t', t'', y cualesquiera q^1 *y* q^2.

Lo cual quiere decir que las preferencias únicamente dependen de q^1 y q^2, pero no del t fijado. En este caso, el curso de acción que escoja el decisor dependerá exclusivamente del atributo Q.

Intuitivamente, la independencia en la utilidad significa que la ordenación de loterías sobre uno de los dos atributos (en esta ocasión q) es independiente del valor (fijo) que le demos al otro atributo. Por ejemplo, si tenemos una lotería justa[(7)] cuyos premios son (movilidad total, 10 años) e (inmovilidad plena, 10 años), que es estrictamente preferida a la opción segura (inmovilidad parcial, 10 años), si se cumple la independencia en la utilidad, el sentido de dicha preferencia estricta debe mantenerse independientemente del número de años, ya sean 5, 15 o 90 años de vida.

La condición de mutua independencia entre las utilidades de los dos atributos, nos permite representar las preferencias individuales mediante una función de utilidad von Newman-Morgenstern cuasiaditiva.

Representación cuasiaditiva o multilineal (Keeney y Raiffa, 1976):

$$u(q,t)= k_T u_T(t) + k_Q u_Q(q) + k_{TQ} u_T(t) u_Q(q),$$

donde *u(.)*, $u_T(.)$ y $u_Q(.)$ están normalizadas entre 0 y 1 y son ponderadas[8] por k_T, k_Q *y* k_{TQ} (= $1 - k_T - k_Q$).

Esta representación puede reducirse a una forma aditiva (si $k_T + k_Q = 1$) o a una multiplicativa (si $k_T + k_Q$¹$1$). La forma aditiva depende de una condición llamada independencia aditiva o independencia en el valor, la cual examinaremos en el siguiente epígrafe y que, de momento, no impondremos a la relación de preferencias individual. En consecuencia, la función cuasiaditiva puede transformarse en:

U(q, t) = U(q)´U(t),

donde *U(q)* y *U(t)* son funciones de utilidad condicionales para *Q* y *T*, respectivamente.

La demostración se encuentra en la nota A2 del apéndice.

¿Qué implicaciones tiene esta forma funcional multiplicativa?. En primer lugar, como ya señalaran Miyamoto y Eraker (1988), bajo el modelo multiplicativo se puede interpretar *U(q,t)* como la utilidad de sobrevivir t años *descontada* por *U(q).* Esto quiere decir que, si por ejemplo, consideramos las siguientes utilidades:

$U(q^1, t)= U(q^1)$´$U(t)$ *y* $U(q^*, t)= U(q^*)$´$U(t)$,

,donde *t* puede tomar cualquier valor entre *1* y *T*; *U(q)* es medida convencionalmente entre $U(q^*)=1$ y $U(q^0)=0$, siendo q^* el estado “salud perfecta” y q^0 el estado “muerte inmediata”; y suponiendo finalmente que $U(q^1)=0.5$.

Una vez escogido un cierto horizonte temporal $t=t'$, tendremos que:

$U(q^*, t')= U(q^*)\times U(t')= 1\times U(t') \Rightarrow U(q^*, t)= U(t')$

$U(q^1, t')= U(q^1)\times U(t')= 0.5\times U(t') \Rightarrow 0.5\times U(q^*, t)$

Lo cual quiere decir que la utilidad de vivir t’ años experimentando el estado de salud q^1 es el 50% de la utilidad de vivir esos mismos t’ años disfrutando de salud normal. Además, como el modelo multiplicativo implica la independencia mutua entre utilidades, dicho porcentaje será constante para todo t (la demostración se encuentra en la nota A3 del apéndice). Siguiendo con nuestro ejemplo:

$U(q^1, t')/U(q^*, t') = [U(q^1)\times U(t')]/[U(q^*)\times U(t')] = 0.5\times U(t')/1\times U(t') = 0.5$

$U(q^1, t'')/U(q^*, t'') = [U(q^1)\times U(t'')]/[U(q^*)\times U(t'')] = 0.5\times U(t'')/1\times U(t'') = 0.5$, siendo $t''\neq t'$.

Por tanto, siempre que $q\equiv q^*$, $U(q)$ no resta valor a la utilidad de la supervivencia, mas cuando $q\prec q^*$ entonces $U(q)$ representa, para cualquier t, la utilidad relativa de vivir ese número de años respecto a la utilidad de vivirlos en q^*.

En segundo lugar, *U(q)* medida mediante la lotería estándar[9] dará siempre el mismo valor independientemente de los años que se pasen en el estado de salud en cuestión (Johannesson 1995).

La lotería estándar, tal y como se utiliza en la metodología AVAC, consiste en que el individuo determine la probabilidad *l* para la *cual* $(q^1, t) \sim [(q^*, t), l, (q^0, t')]$, donde q^* representa la salud perfecta y q^0 representa la muerte inmediata. De nuevo, *U(q)* es normalizada haciendo $U(q^*)=1$ y $U(q^0)=0$. Una vez establecida la indiferencia, tendremos que la probabilidad l mide la utilidad de sobrevivir *t* años en *q* como una proporción de la utilidad de permanecer el mismo número de años en q^*. Esto es:

$U(q, t) = l´U(q^*, t) + (1 - l)´0 = l´U(q^*, t)$

$l = U(q, t)/U(q^*, t)$.

A consecuencia de la mutua independencia entre utilidades este ratio será constante para cualquier *t* que escojamos:

$l = U(q, t)/U(q^*, t) = [U(q)´U(t)]/[U(q^*)´U(t)] = U(q)$.

Por tanto, *U(q)* vale siempre lo mismo con independencia de *t*.

B) Intercambio de tiempo proporcionalmente constante.

Esta condición establece que un individuo estará dispuesto a ceder siempre la misma proporción de sus años de vida para una mejora dada en el nivel de su estado de salud, independientemente de cuál sea el número absoluto de años que le restan por vivir. Por ejemplo, supongamos una persona con 40 años de edad y una esperanza de vida de 70 años que está dispuesto a sacrificar el 50% de los 30 años que tiene por delante a cambio de una mejora en su salud. El supuesto de intercambio proporcionalmente constante implica que esa tasa del 50% no variará cuando esa persona pase a tener 50, 55, 60 o 69 años incluso.

Formalmente, este requisito puede expresarse del siguiente modo:

<u>Si $\exists$ algún $\mu \in [0,1]$[10] ,tal que $(q^1,t) \sim (q^2,\mu t)$ $\forall t$ y para cualesquiera q^1 y q^2, siendo $t > \mu t$ ($\mu t = w$ años) y $(q^2,t) \succ (q^1,t)$ siempre que $q^2 \neq q^1$, se satisface el supuesto de intercambio de tiempo proporcionalmente constante.</u>

El factor *m* representa la proporción de *t* que hace equivalentes *t* años en el estado menos preferido q^1 a *w* años en un estado más preferido q^2 , por tanto, $m=(w/t)$ representará la fracción de un año en el estado q^2 que el individuo considera equivalente a un año completo en un estado inferior q^1. Esta fracción, en virtud de la presente condición, será constante y, en consecuencia, la tasa de sacrificio del individuo $(1-m)$[11] también lo será.

Hasta la introducción de este último supuesto sabemos que podemos representar la utilidad de la cantidad y calidad de vida por medio de un modelo multiplicativo. Este modelo multiplicativo se deriva de la condición de mutua independencia entre las utilidades de los dos atributos, una vez asumido que no se satisface el supuesto de independencia aditiva. Ahora bien, ¿implica por sí solo el modelo multiplicativo la condición de intercambio de tiempo proporcionalmente constante?.

Supongamos que se da la siguiente relación de indiferencia entre dos perfiles de salud:

$(q^1,t) \sim (q^2,w)$

Por la propiedad de la utilidad esperada:

$U(q^1,t) = U(q^2,w)$

Por asumir la forma multiplicativa:

$U(q^1)´U(t) = U(q^2)´U(w)$

$U(q^1)/U(q^2) = U(w)/U(t)$

$U(w) = U(t)´[U(q^1)/U(q^2)]$

$w = U^{-1}\{U(t)´[U(q^1)/U(q^2)]\}$

Suponiendo que *w* es un término proporcional a *t*, tal que $w=mt$:

$mt = U^{-1}\{U(t)´[U(q^1)/U(q^2)]\}$

$m = (1/t)´\ U^{-1}\{U(t)´[U(q^1)/U(q^2)]\}$

Como la expresión que hay a la derecha de la igualdad no es independiente de *t*, el factor *m* no será constante para todo *t*. Por tanto, la forma multiplicativa no implica per se el intercambio de tiempo proporcional constante.

De hecho, que *m* sea independiente de *t* depende de la forma específica que adopte la utilidad de la supervivencia *U(t).* Pliskin et al. (1980) demostraron que cuando las condiciones de mutua independencia entre utilidades e intercambio de tiempo proporcional constante se mantienen de modo simultáneo, entonces *U(t)* exhibe una actitud hacia el riesgo proporcionalmente constante en todos los estados de salud. Esta propiedad desarrollada por Pratt (1964) para funciones de utilidad sobre resultados monetarios significa, en el contexto AVAC, que el decisor mostrará para todos los estados de salud la misma actitud hacia la asunción de riesgos proporcionales (por ejemplo, una lotería doble o nada, donde arriesgo un 50% de mi esperanza de vida por poder prolongarla el doble) independientemente del número absoluto de años de vida que le resten por vivir (Loomes y McKenzie 1989; Johannesson 1995). Formalmente esto puede expresarse - inspirándonos en Miyamoto y Eraker (1989) - diciendo que la función de utilidad de la duración de la vida presenta una postura hacia el riesgo proporcionalmente constante e independiente del estado de salud siempre que se verifique:

$$\{[t^1, l, t^2] \succ [t^3, l', t^4]\} \text{ (en } q) \;\; \hat{U} \;\; \{[bt^1, l, bt^2] \succ [bt^3, l', bt^4]\} \text{ (en } q),$$

" q y cualesquiera t^1, t^2, t^3, t^4; siendo *b* un porcentaje cualquiera de t.

Si $U(t)$ verifica esta condición, se puede demostrar que su posible forma funcional queda limitada a una familia de funciones logarítmicas y polinómicas, de entre las cuales podemos seleccionar la siguiente:

$U(t)= t^r$, *con* $r>0$,

siendo r un parámetro (constante) que recoge la postura hacia el riesgo respecto a t (Miyamoto y Eraker, 1985).

La demostración se encuentra en la nota A4 del apéndice

Cuando U(t) adopta esta forma específica, la utilidad bivariante multiplicativa da lugar al modelo AVAC ajustado por el riesgo (Pliskin et al. , 1980, Miyamoto y Eraker, 1985; Johannesson, 1994, 1995; Bleichrodt 1996). Esto es:

$U(q,t)= t^r ´ U(q)$,

con $U(q)>0$ valorada entre $U(q^0)=0$ y $U(q^*)=1$; $r,t>0$(12).

Bajo esta forma de U(t), ahora sí que el factor µ es completamente independiente del número de años de vida:

Si (q^1,t)~(q^2,w)

Por la propiedad de la utilidad esperada:

$U(q^1,t) = U(q^2,w)$

Por $U(q,t)= t^r ´ U(q)$:

$U(q^1) ´ t^r = U(q^2) ´ w^r$

$U(q^1)/U(q^2) = (w/t)^r$

Suponiendo que w es un término proporcional a t:

$[U(q^1)/U(q^2)]^{1/r} = w/t = m$

Como el cociente de utilidades es independiente de t, entonces m será constante para todo t. Además, como ya vimos, este cociente de utilidades, cuando $q^2 º q^*$, corresponde con el peso de la calidad de vida calculado vía lotería estándar. En esta ocasión está elevado al exponente $1/r$ e igualado a la ratio w/t. Esta ratio se corresponde con la ponderación de la calidad de vida estimada mediante la técnica de la compensación de tiempos desarrollada por Torrance et al. (1972). Según este método, el decisor estima cuál es el número de años en perfecta salud w que considera equivalente a t años en salud inferior a la perfecta. Una vez hallada la indiferencia entre ambas alternativas la utilidad[13] del estado inferior se iguala a la ratio w/t. Es decir:

Si $(q,t)\sim(q^*,w)$, entonces $V(q) ´ t=V(q^*) ´ w$, lo cual implica que $V(q)=w/t$; estando $V(.)$ normalizada entre 0 y 1.

Como puede observarse seguidamente, la utilidad de q obtenida de la lotería estándar y la función de valor obtenida mediante la compensación de tiempos no coincidirán :

$$U(q,t)/U(q^*,w) = U(q) = (w/t)^r = [V(q)]^r,$$

siendo $U(.)$ la utilidad estimada por la lotería estándar y $V(.)$ la estimada por la compensación de tiempos.

La explicación teórica usual de esta discrepancia apunta a que los sujetos son aversos al riesgo, lo cual hace que la utilidad aumente más rápidamente en el corto que en el largo plazo, por lo que la ponderación calculada mediante el método de la compensación temporal infraestima la utilidad del estado de salud que se experimenta (Miyamoto y Eraker, 1985; Stiggelbout et al., 1994). Efectivamente, si el decisor es averso al riesgo entonces r es menor que uno (y mayor que cero por nuestra definición de $U(t)$). De esto se sigue que $(w/t)<(w/t)^r$, por lo que si estimamos $U(q)$ como (w/t) estaremos infravalorando el valor de q.

c) Neutralidad hacia el riesgo respecto del tiempo de vida.

Esta tercera y última condición que imponemos a la estructura de preferencias del decisor, consiste en que sea neutral hacia el riesgo respecto a los años de vida. La neutralidad hacia el riesgo se consigue en nuestra modelización simplemente haciendo *r* igual a 1. Obtenemos así el algoritmo básico de cálculo de los AVAC: el modelo AVAC convencional.

$U(q,t)= t\,\acute{}\,U(q)$,

con $U(q)>0$ valorada entre $U(q^0)=0$ y $U(q^*)=1$; $t>0$.

Se puede apreciar como la función de utilidad bivariante que resulta es *lineal*, y parte del origen de coordenadas(14) .Otra consecuencia de la neutralidad hacia el riesgo será que sólamente en ese caso $U(q)$ y $V(q)$ coincidirán, ya que el parámetro que ajusta por el riesgo vale la unidad.

Podemos verificar gráficamente que el modelo AVAC convencional satisface las tres condiciones que hemos deducido para los estados de salud constantes: la independencia mutua entre utilidades, la intercambio de tiempo proporcionalmente constante y la neutralidad hacia el riesgo. Los gráficos 1 y 2 representan en ordenadas a $U(q,t)$ para q^* y q^1, respectivamente, y en abcisas el número de años de vida.

(Gráficos 1 y 2)

Una vez que las funciones de utilidad son lineales (neutralidad hacia el riesgo respecto del tiempo de vida), se puede comprobar en estos gráficos el cumplimiento de las otras dos condiciones de las que hablamos. En primer lugar, en el gráfico 1 la utilidad del estado q^1 será siempre una proporción invariable de la utilidad del estado q^* (mutua independencia entre utilidades). En segundo lugar, en el gráfico 2 se demuestra que la utilidad del estado q^1 será siempre igual a la utilidad de una proporción invariable (la misma que antes) del número de años en salud perfecta (intercambio de tiempo proporcionalmente constante). Concretamente, los gráficos han sido trazados para representar una proporción del 50%.

Como ya mencionamos en la introducción, Bleichrodt (1996) ha reducido las condiciones que hemos visto a tan sólo la última de ellas: la neutralidad hacia el riesgo. La idea básica del planteamiento de Bleichrodt es que una representación de $U(q^1,t)$ y de $U(q^*,t)$ idéntica a la que tenemos en el gráfico 1, puede conseguirse asumiendo que dicha función de utilidad exhiba neutralidad hacia el riesgo respecto de los años de vida junto con otra condición "intuitivamente auto-evidente en el contexto médico" (Bleichrodt, 1996). Esta condición - que Bleichrodt llama condición 0 - se podría enunciar diciendo que la utilidad de 0 años de vida es la misma en todos los estados de salud. Así, si bien la neutralidad hacia el riesgo es una condición común tanto a la formulación de Pliskin et al. (1980) como a la de Bleichrodt (1996), mientras los primeros imponen también la mutua independencia entre utilidades y el intercambio de tiempo proporcionalmente constante, el último impone tan sólo la condición 0. (En la nota A5 del apéndice puede encontrarse una demostración de como la neutralidad hacia el riesgo y la condición cero son condiciones necesarias y suficientes para el modelo AVAC convencional.)

4.- Modelización en el caso de estados de salud temporales.

Los AVAC modelizados para estados de salud no constantes o temporales constituyen el caso más general. El trabajar con estados transitorios introduce en nuestro análisis perfiles de salud como el del siguiente ejemplo: {t=1 a 55 años, q_t=salud perfecta; t=56 a 70 años, q_t=salud cuasiperfecta; t=71 a 75 años, q_t=salud mediocre}. Como se pone de manifiesto, la relajación del supuesto de constancia de los estados de salud, conduce a que cada perfil de salud que consideremos sea una T-tupla cuyos componentes pueden variar de un año a otro. En adelante mantendremos, no obstante, la restricción de la invariabilidad intra-anual.

Las caracterizaciones del modelo AVAC para perfiles de salud donde se permite a la calidad de vida variar a lo largo del tiempo son escasas. Por su mayor simplicidad el caso de estados de salud crónicos ha recibido una mayor atención. Sin embargo, existen dos trabajos - Broome (1993) y Bleichrodt (1995) - en los que se deriva el modelo AVAC para estados de salud temporales (modelo AVAC general de aquí en adelante); y un tercer artículo de Johanesson (1995) en el que se enumeran las condiciones para que el modelo AVAC general sea válido pero en el que no se llega a formalizar tal modelo.

Por nuestra parte, el modelo que vamos a desarrollar está inspirado en un teorema sobre la utilidad esperada aditiva formulado por Fishburn (1970), a partir del cual derivaremos dos condiciones equivalentes a las tres obtenidas por Bleichrodt (1995).

La condición crucial del modelo AVAC con estados de salud temporales es la denominada <u>independencia aditiva</u>. Este supuesto de independencia nos dice que las preferencias entre loterías sobre perfiles de salud están gobernadas únicamente por sus distribuciones de probabilidad marginal y no por sus distribuciones de probabilidad conjunta. Formalmente, la independencia aditiva se puede expresar así:

Definición 1. Independencia aditiva:

Si *L’ y L’’* Î *L*, si L_t’ es la distribución marginal[15] de *L’* sobre *Q*, y si L_t’=L_t’’ para $t=1,2,...,T$; entonces *L’~L’’*.

Esta proposición significa que el decisor siempre será indiferente a dos loterías confrontadas cualesquiera, toda vez que las probabilidades marginales de las consecuencias (los perfiles de salud) sean iguales. Supongamos, por ejemplo, la siguiente elección:

$$[(q^1_1,q^1_2),1/2,(q^2_1,q^2_2)] \text{ ó } [(q^1_1,q^2_2),1/2,(q^2_1,q^1_2)]$$

Si el decisor se comporta como predice la independencia aditiva tendrá que mostrarse indiferente entre ambas loterías, ya que $L_1(q^1)=L_1(q^2)=L_2(q^1)=L_2(q^2)=1/2$. Por tanto:

$$[(q^1{}_1,q^1{}_2),1/2,(q^2{}_1,q^2{}_2)] \sim [(q^1{}_1,q^2{}_2),1/2,(q^2{}_1,q^1{}_2)]$$

En otras palabras, en presencia de la independencia aditiva el decisor manifestará una postura <u>neutral al riesgo multivariante</u> (Richard, 1975). La principal implicación que se deriva de esta postura es que excluye cualquier tipo de interacción entre los atributos. No será posible ningún grado de complementariedad ni de sustituibilidad entre los mismos (Keeney y Raiffa, 1976). La traslación de esta consecuencia de la independencia aditiva al contexto que nos ocupa, es que las preferencias hacia la calidad de vida alcanzada en un periodo dado serán independientes de la calidad de vida conseguida en cualquier otro periodo (Maas y Wakker, 1994; Bleichrodt, 1995; Johannesson, 1995). Volvamos al ejemplo anterior e identifiquemos q^1 con q^* (salud perfecta) y q^2 con q' (salud deteriorada). La independencia aditiva implica:

$$[(q^*{}_1,q^*{}_2),1/2,(q'{}_1,q'{}_2)] \sim [(q^*{}_1,q'{}_2),1/2,(q'{}_1,q^*{}_2)]$$

Sin embargo, según Pliskin et al.(1980) y Mass y Wakker (1994), la mayoría de la gente prefiere la primera lotería a la segunda. Es decir, prefieren que los dos resultados buenos vayan juntos (salud perfecta durante dos años) a realizar una elección equilibrada (disfrutar seguro de salud perfecta durante un año). Este tipo de elecciones revelan la existencia de complementariedad entre los niveles del estado de salud en dos momentos distintos del tiempo.

Una vez impuesta la condición de independencia aditiva entre los atributos, se puede obtener una función de utilidad von Newman-Morgenstern separable aditivamente.

Teorema 1: adaptado de Fishburn (1970):

Si L es un conjunto de distribuciones de probabilidad simples definidas sobre Q y u(.) es una función de utilidad von Newman-Morgenstern, entonces si y sólo si se cumple con la independencia aditiva u(q) satisfará:

$$u(q) = \sum_{t=1}^{T} u_t(q_t) \qquad [1]$$

La función *u(q)* representa la utilidad de todo el perfil de salud en cuestión. La llamaremos función de utilidad conjunta. Cada una de las funciones $u_t(q_t)$ representan la utilidad de la calidad de vida disfrutada en cada periodo. Las llamaremos funciones de utilidad uni-periodo.

Sin embargo, esta primera forma de utilidad separable aditivamente que hemos obtenido, no se corresponde aún con el modelo AVAC tal y como es asumido normalmente. El modelo AVAC, de hecho, asume lo siguiente(16).

$$u(q) = \sum_{t=1}^{T} u(q_t) \qquad [2]$$

Es decir, asume que las utilidades uni-periodo son idénticas entre sí. ¿Qué implica este supuesto? Simplemente, que las preferencias del decisor hacia distintos perfiles de salud son independientes del momento en el tiempo en que sucede un estado de salud. En consecuencia, el decisor no descuenta el futuro (ni lo sobrecuenta) respecto al momento presente. En otras palabras: no hay preferencia temporal.

Para obtener el modelo AVAC general partiendo del teorema de Fishburn necesitamos imponer una restricción adicional a la condición de la independencia aditiva. Nosotros vamos a denominar a esta restricción, condición de simetría y la definimos a continuación.

Definición 2.Condición de simetría:

Si $\{q_i'\}$ es una reordenación del perfil de salud $\{q_i\}$, entonces $\{q_i\} \sim \{q_i'\}$.

La definición anterior sugiere que ante una secuencia temporal de estados de salud que sea una permutación de otra secuencia siempre se mantendrá la indiferencia. Si esta condición se cumple, entonces no habrá impaciencia ("cuanto antes se reciban los resultados favorables mejor"). Veamos un ejemplo para el caso de un horizonte temporal de tres periodos. Supongamos que tenemos tres estados de salud: q', q'' y q^{+}. Suponiendo $q_{\{t\}}' \succ q_{\{t\}}''$, con t=1,2,3; $\succ$ manifiesta impaciencia si $(q_1', q_2'', q_3^{+}) \succ (q_1'', q_2', q_3^{+})$. Es decir, preferimos que el mejor resultado q' suceda cuanto antes. Ahora bien, resulta obvio que si la secuencia (q_1', q_2'', q_3^{+}) fuese indiferente a (q_1'', q_2', q_3^{+}) - precisamente lo que postula la condición de simetría - entonces no habría impaciencia (ni su reverso: desear que los sucesos favorables se postpongan en el tiempo). Basándonos en la condición de simetría podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2:

El modelo AVAC general es equivalente a postular la condición de simetría junto con el supuesto de independencia aditiva.

La demostración se encuentra en la nota A6 del apéndice.

Así pues, postular la condición de simetría (siempre y cuando se cumpla también la independencia aditiva) resulta equivalente a afirmar que las diferentes utilidades uni-periodo sean idénticas entre sí.

Hemos obtenido, en suma, dos condiciones para que el modelo AVAC aplicado sobre estados de salud que pueden variar en el tiempo pueda caracterizarse como una función de utilidad von Newman-

Morgenstern(17).Además, estas dos condiciones implican tanto la mutua independencia entre utilidades (una condición menos estricta que la independencia aditiva), el intercambio de tiempo proporcionalmente constante (por la simetría) y la neutralidad hacia el riesgo respecto de los años de vida (la función de utilidad es lineal).

5.- Conclusiones.

El objetivo de este trabajo es exponer de forma sistemática las condiciones que han de ser impuestas sobre la relación de preferencias individual para que el modelo AVAC sea consistente con los axiomas de la teoría de la utilidad esperada. Para cumplir con esta finalidad hemos desarrollado un modelo que afronta dos problemas de elección: la elección entre alternativas arriesgadas definidas sobre estados de salud constantes en el tiempo y la elección entre alternativas arriesgadas definidas sobre estados de salud no constantes o temporales.

En el primer caso, las condiciones que han de observar los AVAC para ser interpretados como utilidades von Newman-Morgenstern son las condiciones de mutua independencia entre utilidades, intercambio de tiempo proporcionalmente constante y neutralidad ante el riesgo respecto de los años de vida. Estas tres condiciones fueron derivadas originariamente por Pliskin et al. (1980). En el presente trabajo deducimos las mismas condiciones que Pliskin et al., sólo que siguiendo un camino ligeramente diferente al suyo. Recientemente, Bleichrodt (1996) ha demostrado que esas tres condiciones pueden ser reducidas solamente a la neutralidad frente al riesgo respecto de los años de vida, siempre y cuando asumamos un principio intuitivamente aceptable en el contexto de la salud que Bleichrodt denominó condición 0. En el apéndice aportamos una prueba de que la neutralidad hacia el riesgo respecto de los años de vida es una condición necesaria y suficiente, en presencia de la condición 0, para obtener el modelo AVAC.

En el segundo caso, partiendo de un axioma sobre utilidad esperada aditiva formulado por Fishburn (1970), derivamos la condición de independencia aditiva y una nueva condición en la literatura sobre AVAC que bautizamos como condición de simetría. Estas dos condiciones conjuntamente impuestas implican los tres supuestos mencionados para los estados de salud crónicos. Además, son equivalentes a los tres supuestos establecidos por Bleichrodt (1995): independencia aditiva, preferencias intertemporales estables para los estados de salud e igualdad de los pesos asociados a las mejoras de salud en varios periodos.

Una vez que han sido derivados los supuestos que han de satisfacer los AVAC para poder ser caracterizados como utilidades esperadas, cabría preguntarse acerca de la validez de estos supuestos. Por validez queremos significar no sólo la virtual capacidad descriptiva y predictiva que tenga el modelo AVAC, sino, incluso, su validez normativa. No en vano, es muy común el defender la teoría de la utilidad esperada como un conjunto "intuitivamente atractivo" de axiomas que prescriben cómo deben ser las decisiones bajo riesgo. El estudio de la validez descriptiva y normativa del modelo AVAC no ha sido objeto de estudio en este trabajo. Sin embargo, la evidencia empírica acumulada parece indicar que las restricciones impuestas por este modelo sobre la relación de preferencias individual son muy severas. Estos resultados desafían directamente su validez descriptiva, es decir, parece que los individuos no se comportan tal y como las condiciones que hemos estudiado prescriben. Pero, otra cuestión distinta es si no deberían comportarse como tales supuestos sugieren. Si lo que pretendemos es que los AVAC nos ayuden a tomar decisiones: ¿de qué nos serviría contar con un modelo que describe acertadamente las elecciones reales que hacen los individuos si entendemos que dichas elecciones son perfectibles?...

APÉNDICE

A1. Los axiomas que vamos a exponer son axiomas necesarios y suficientes para hallar una representación de la utilidad esperada como la que definíamos en el supuesto c) de la página número 10. Estos axiomas corresponden a Jensen (1967). Según esta axiomatización, L es un espacio mixto. El enfoque del espacio mixto fue formulado por Herstein y Milnor (1953) y, "...es una teoría abstracta, establecida sin referencia a cualquier contexto en particular que tenga que ver con la adición de números reales"(Kreps, 1988, p.54). Así, por ejemplo, la combinación de dos distribuciones de probabilidad $\alpha L_1+(1-\alpha) L_3$ es una "mezcla" de L_1 y L_3, cuya propiedad más importante es la convexidad: $\alpha L_1+(1-\alpha) L_3 \in$ L.

Axioma 1. Orden débil: la relación $\succ$ es un orden débil asimétrico.

Definimos $\sim$ y $\succsim$ sobre L_Q de $\succ$ como:

$$L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \text{no } L_1 \succ L_2 \text{ y no } L_2 \succ L_1$$

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow L_1 \succ L_2 \text{ o } L_1 \sim L_2$$

Axioma 2. Independencia: Para todo $L_1, L_2, L_3 \in L_Q$ y $\alpha \in [0,1]$,

$$L_1 \succ L_2 \Rightarrow \alpha L_1+(1-\alpha) L_3 \succ \alpha L_2+(1-\alpha) L_3.$$

Axioma 3. Continuidad: Para todo $L_1, L_2, L_3 \in L_Q$, si $L_1 \succ L_2 \succ L_3$ entonces existen $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que $\alpha L_1+(1-\alpha) L_3 \succ L_2 \succ \beta L_1+(1-\beta\alpha) L_3.$

A2. En el teorema 5.2 de Keeney y Raiffa (1976) se define la constante $k=(1-k_T-k_Q)/(k_T k_Q)$. Cuando $k_T+k_Q \neq 1$, $u(q,t)$ podrá representarse por una forma multiplicativa. Partiendo de la forma cuasiaditiva:

$u(t,q)= k_T u_T(t) + k_Q u_Q(q) + k_{TQ} u_T(t) u_Q(q)$

Sustituyendo $k_T k_Q k$ en $1-k_T-k_Q$:

$u(t, q)= k_T u_T(t) + k_Q u_Q(q) + k_Q k_T k\, u_T(t) u_Q(q)$

Multiplicando a ambos lados por k:

$ku(t, q)= kk_T u_T(t) + kk_Q u_Q(q) + k_Q k_T k^2\, u_T(t) u_Q(q)$

Manipulando la igualdad:

$1+ku(t,q)=[1+ kk_Q u_Q(q)]´[1+ kk_T u_T(t)]$

Ya que las funciones de utilidad son únicas salvo para toda transformación afín positiva:

$U(q,t)=U(q)´U(t).$

A3. La demostración de que el modelo multiplicativo predice que la independencia en la utilidad se satisface es la siguiente:

$[(q^1, t'), l, (q^2, t')] \succ [(q^1, t'), l', (q^2, t')]$

Tomando utilidades:

$U[(q^1, t'), l, (q^2, t')] > U[(q^1, t'), l', (q^2, t')]$

Desarrollando la utilidad esperada:

$l´U(q^1, t')+(1-l)´U(q^2, t') > l'´U(q^1, t')+(1-l')´U(q^2, t')$

Aplicando la forma multiplicativa:

$l´U(q^1)U(t')+(1-l)´U(q^2)U(t') > l'´U(q^1)U(t')+(1-l')´U(q^2)U(t')$

Simplificando:

$l´U(q^1)+(1-l)´U(q^2) > l'´U(q^1)+(1-l')´U(q^2)$

Multiplicando todo por $U(t'')$:

$l´U(q^1)U(t'')+(1-l)´U(q^2)U(t'') > l'´U(q^1)U(t'')+(1-l')´U(q^2)U(t'')$

Retrocediendo a la utilidad de la que proviene:

$U[(q^1, t''), l, (q^2, t'')] > U[(q^1, t''), l', (q^2, t'')]$

Retrocediendo a las loterías sobre las que tomamos la utilidad:

$[(q^1, t''), l, (q^2, t'')] \succ [(q^1, t''), l', (q^2, t'')]$

A4. La familia de funciones polinómicas/logarítmicas a la que hacemos referencia es concretamente (Pratt, 1964):

$$u(x) \sim \begin{cases} -x^{-(1-c)} & con\ c < 1 \\ log(x) & con\ c = 1 \\ x^{(1-c)} & con\ c > 1 \end{cases}$$

El símbolo ~ denota en esta ocasión que *u(x)* y cualquiera de las funciones a su derecha son *estratégicamente equivalentes* entre sí (Keeney y Raiffa, 1976). Es decir, son equivalentes como utilidades, lo cual significa que son una transformación afín positiva una de la otra (Pratt, 1964).

Esta familia de funciones se caracterizan por hacer la medida Arrow-Pratt de aversión relativa al riesgo igual a la constante *c*:

$$r^*(x) = xr(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)} = c$$

De forma que cuando *c* es mayor que cero el decisor tiene una aversión al riesgo relativo constante; cuando *c* es menor que cero el decisor es proclive al riesgo relativo constantemente; y cuando *c* es igual a cero el decisor es neutral al riesgo. En esta última situación la medida de aversión relativa al riesgo $r^*(x)$ y la medida de aversión absoluta al riesgo $r(x)$ coincidirán. Si $c=0$ entonces $r(x)=c=0$, lo cual como $r^*(x)=xr(x)$, implica que $r^*(x)=0$, por lo que $r(x)=r^*(x)$.

A continuación vamos a demostrar que *U(t)*, dados los supuestos de independencia mutua entre las utilidades y de intercambio de tiempo proporcionalmente constante, tendrá necesariamente que adoptar alguna de las tres formas siguientes que son consistentes con una postura hacia el riesgo proporcionalmente constante:

$$U(t) = \begin{cases} -t^{r} & con\ r < 0 \\ log(t) & con\ r = 0 \\ t^{r} & con\ r > 0 \end{cases}; \qquad \text{siendo r=1–c.}$$

Si $U(t)=t^r$, con $r>0$

Por el supuesto de intercambio de tiempo proporcionalmente constante:

$(q^1,t)\sim(q^2,mt)$, para cualesquiera q^1 y q^2

Por asumir la forma multiplicativa:

$U(t)´U(q^1)=U(mt)´U(q^2)$

Sustituyendo:

$t^r´U(q^1)=(mt)^r´U(q^2)$

$m=[U(q^1)/U(q^2)]^{1/r}$

Se puede comprobar facilmente que en el caso en que $U(t)=-t^r$, con $r<0$, se llega al mismo resultado sólo que para $r<0$.

Por último, si $U(t)=log(t)$, con $r=0$

Por el supuesto de intercambio de tiempo proporcionalmente constante:

$(q^1,t)\sim(q^2,mt)$

Por asumir la forma multiplicativa:

$U(t)´U(q^1)=U(mt)´U(q^2)$

Sustituyendo:

$log(t)´U(q^1)=log(mt)´U(q^2)$

$m=exp.[U(q^1)/U(q^2)]$

Queda demostrado que las tres funciones de arriba satisfacen las condiciones de independencia mutua entre utilidades y de intercambio de tiempo proporcionalmente constante.

A5. Como se explica en la página 22, *m* es igual a una función de valor calculada mediante el método de la compensación de tiempos. Esta función de valor está acotada entre $V(q^0)=0$ y $V(q^*)=1$. Entonces, sustituyendo en $U(q,t)$ las funciones de valor que podemos obtener, tenemos:

$$U(q,t)=\log V(q)\times\log(t) \quad \text{si } r=0$$

$$U(q,t)=[V(q)]^r\times t^r \qquad \text{si } r\neq 0$$

Se puede comprobar que cuando consideramos $q=q^0$, entonces $V(q^0)=0$ y $U(q^0,t)$ no estará definida si $r=0$. Por tanto, podemos excluir el caso $r=0$. A continuación, si como hacen Miyamoto y Eraker (1985), deshechamos la expresión en la que tanto t como r son negativas en base a que predice una aversión al riesgo extrema, nos queda únicamente el caso en que $U(t) = t^r$, con $r>0$. Queda demostrado que podemos tomar U(t) como t^r, con r>0.

La neutralidad hacia el riesgo respecto de los años de vida en cualquier estado de salud podemos definirla como:

$$[t', l, t''] \text{ (en } q') \sim E[t', l, t''] \text{ (en } q'),$$

siendo *E(.)* la esperanza matemática o valor esperado de la lotería.

Esta relación de indiferencia implica que el equivalente cierto de la lotería es igual a su valor esperado. Esto solamente sucederá si y sólo si la función de utilidad es lineal (Keeney y Raiffa, 1976). Queda demostrado que la neutralidad hacia el riesgo implica la linealidad.

Si $U(q,t)=v(q)+u(q)t$, entonces tanto la medida de aversión al riesgo absoluta como relativa son iguales a cero. Queda demostrado que la linealidad implica la neutralidad hacia el riesgo.

Si ahora imponemos la condición 0 junto con la neutralidad hacia el riesgo, entonces $U(q,0)= v(q)+u(q)\times 0= v(q)$, que será constante para todos los estados de salud. Como cualquier función de utilidad von Newman-Morgenstern genera valores en una escala intervalo son operaciones matemáticas admisibles tanto la adición como la sustracción de constantes. En consecuencia podemos restar $v(q)$ a la expresión lineal de $U(q,t)$, obteniendo finalmente $U(q,t)=u(q)t$, que es el modelo AVAC convencional. Queda demostrado que la condición 0 junto con la neutralidad hacia el riesgo de la función de utilidad implican el modelo AVAC.

Por último, si consideramos el modelo AVAC convencional, resulta obvio que $U(q,t)$ es lineal - por tanto neutral hacia el riesgo respecto de los años de vida - y que se cumple la condición cero pues $U(q,0)=0$ para todo q. Queda demostrado que el modelo AVAC convencional implica la condición 0 y la neutralidad hacia el riesgo de la función de utilidad.

A6. En base a la condición de simetría enunciada en la página 30 podemos establecer que $(q_1,q_2,\ldots,q_T)\sim(q_2,q_1,\ldots,q_T)\sim\ldots(q_T,\ldots,q_2,q_1)$. La indiferencia entre las distintas reordenaciones implica que $u(q_1,q_2,\ldots,q_T)=u(q_2,q_1,\ldots,q_T)=\ldots=u(q_T,\ldots,q_2,q_1)$. Esto se puede expresar como $\sum u_t(q_t)= \sum u_t(q_t) =\ldots= \sum u_t(q_t)$, con los estados de salud permutados a lo largo de los T años de vida. Si ahora hacemos $u_t=u$ se mantendrá la igualdad. Por tanto, todas las funciones de utilidad uniperiodo son idénticas.

Demostraremos ahora el reverso de la implicación del teorema 2. Si las funciones de utilidad uniperiodo son iguales, tenemos que: $u_1(q_1)=u_2(q_1)=...=u_T(q_1)$, $u_1(q_2)=u_2(q_2)=...=u_T(q_2),...,u_1(q_T)=u_2(q_T)=...=u_T(q_T)$. Por lo tanto, $u_1(q_1)+u_2(q_2)+...+u_T(q_T)= u_1(q_2)+u_2(q_1)+...+u_T(q_T)= ...= u_1(q_T)+u_2(q_2)+...+u_T(q_1)$, como es fácilmente comprobable. Por independencia aditiva, sabemos que $u(q_1,q_2,...,q_T)= u_1(q_1)+u_2(q_2)+...+u_T(q_T)$, $u(q_2,q_1,...,q_T)= u_1(q_2)+u_2(q_1)+...+u_T(q_T)$, y así con todos los perfiles de salud. Como las sumas de las utilidades uniperiodo correspondientes a los diferentes perfiles de salud son idénticas, entonces $u(q_1,q_2,...,q_T)=u(q_2,q_1,...,q_T)=...=u(q_T,...,q_2,q_1)$. Como $u(q)$ representa la relación de preferencias entre perfiles de salud $(q_1,q_2,...,q_T)\sim(q_2,q_1,...,q_T)\sim...(q_T,...,q_2,q_1)$.

Queda demostrado que la condición de simetría, junto con el supuesto de independencia aditiva, es equivalente a postular el modelo AVAC general.

NOTAS

(1) Para una descripción detallada del análisis coste-utilidad comparándolo con otros métodos de evaluación económica empleados en la toma de decisiones médicas recomendamos Drummond et al. (1991).

(2) Asummimos, en consecuencia, que nos enfrentamos a situaciones “donde las probabilidades son conocidas o al menos cognoscibles”(Deaton y Muellbauer, 1980, p.380).

(3) Podemos tener varios perfiles de salud alternativos $\{q^i: i=1,2,...,m\}$. A su vez cada perfil $q^i=\{q_t^j\}$ con t=1,2,...,T años y $j=0,...,*$ representando los distintos estados de salud que van desde la muerte (0) hasta la salud perfecta (*).

(4) Si $L', L'' \in L$ y $\alpha \in [0,1]$, entonces $\alpha L'+(1-\alpha) L''$ también $\in L$.

(5) Una distribución o medida de probabilidad simple, en nuestro contexto, es aquella función definida sobre Q, tal que $l(q^i)=0$ excepto para un subconjunto finito de Q para los que $\sum l(q^i)=1$.

(6) Como veremos, ésta es una de las condiciones que hay que imponer a los AVAC para que sean utilidades vN-M.

(7) Una lotería justa es una lotería equiprobable. En este caso una lotería 50%-50%.

(8) Estas ponderaciones son constantes positivas que actúan como “parámetros de transformación de escala” (Fishburn, 1967, p.437), permitiéndonos normalizar como deseemos las utilidades condicionales. Por ejemplo, entre 0 y 1.

(9) La lotería estándar se fundamenta directamente en la teoría de la utilidad esperada. De hecho, en muchas versiones de los axiomas de von Newman-Morgenstern se la presenta como el axioma mismo de continuidad. En los axiomas que reproducimos en el apéndice, aunque la lotería estándar no figura como un axioma autónomo, está implicada por los que recogemos.

(10) Hacemos notar que la única circunstancia en la que $m=0$ resulta admisible es cuando el estado menos preferido que estamos comparando es q^0. En cualquier otro caso, estaríamos considerando tan bueno disfrutar de t años de vida en el estado de salud q^1 (distinto de q^0) que vivir cero años en q^2, seguido por la muerte inmediata. Es decir, $(q^1,t)\sim(q^2,0\times t)$. Esta relación de indiferencia viola la monoticidad estricta de las preferencias sobre los resultados. Una propiedad que subyace al modelo AVAC. Efectivamente, si admitimos que $(q^2,0)\sim(q^1,0)$, esto implica que $(q^1,t)\sim(q^1,0)$, lo cual, bajo monoticidad estricta, sólo puede ocurrir si $t=0$. A su vez, $m=1$ sólo es posible si los dos estados de salud son el mismo. Siempre que $q^1 \neq q^2$, entonces $(q^1,t)\sim(q^2,1\times t)$. Esta situación significa que al decisor le da igual vivir t años en un estado que en otro pero esto entra en contradicción con $(q^2,t)\succ(q^1,t)$.

(11) Si, por ejemplo, m es igual a 0.25 esto significa que el individuo valora un año en q^2 como cuatro en q^1 . Entonces, por cada año extra en q^2 el individuo está dispuesto a perder tres en q^1. Sacrifica, pues, $TS = (1-m)=0.75$, es decir, las tres cuartas partes de cada año en q^1 para vivir la cuarta parte restante en q^2.

(12) Advertimos que si t fuese igual a 0, entonces $E[u(q,0)]=E[0\times u(q)]=E(0)=0$; es decir, una duración cero evitaría que q fuese independiente en la utilidad respecto de t. Bleichrodt (1996) lo expresa del siguiente modo: “La independencia en la utilidad está restringida al dominio donde la duración de la vida 0 es excluida...”(p.19).

(13) Usualmente la literatura se refiere a esta función de utilidad como función de valor, para destacar que ha sido estimada bajo certeza. En este caso, el decisor conoce con total seguridad cuál es la consecuencia asociada a cada acción. Nosotros denotaremos esta clase de utilidades como $V(.)$.

(14) Como veremos al comentar la condición 0 de Bleichrodt (1996), la neutralidad hacia el riesgo respecto del tiempo de vida, per se, no implica necesariamente la linealidad con ordenada en el origen nula. Sin embargo, la neutralidad hacia el riesgo en presencia de las otras dos condiciones *sí* tiene que ser necesariamente como en el gráfico 1.

(15) Si L' en L es una distribución de probabilidad simple sobre Q, entonces L'_t en L_t, será la distribución marginal de L' sobre Q_t. Definimos una medida de probabilidad marginal L'_t sobre Q_t como $L'_t(R_t)=L(\{q:q \in Q,\ q_t \in R_t\})\ \forall R_t \subseteq Q_t$. Por ejemplo, si tenemos una probabilidad conjunta $L'(q'_1, q'_2)=0'75$ y $L''(q'_1, q''_2)=0'25$, entonces las probabilidades marginales valdrán $L_1(q'_1)=0'75+0'25=1$, $L_2(q'_2)=0'75$ y $L_2(q''_2)=0'25$, respectivamente.

(16) Resulta obvio que si el modelo AVAC convencional es igual a $T \times U(q)$ o, lo que es lo mismo, sumar T veces $U(q)$, entonces si q varía de año en año tendremos $u(q_1)+u(q_2)+\ldots+u(q_T) = \sum u(q_t)$. Ésta es la extensión del modelo AVAC empleado con estados crónicos al caso más general de estados temporales

(17) La única diferencia respecto a las conclusiones de la obtenidas por Bleichrodt (1995) reside en las ponderaciones que multiplican a las utilidades uni-periodo. Bleichrodt obtiene que $u(q)=\sum k_t u_t(q_t)$, donde cada k_t es una constante de transformación de escala susceptible de interpretarse como un factor de descuento, de modo que $k_t = u(q_1^0,\ldots,q^0_{t-1},q^*_t,q^0_{t+1},\ldots,q^0_T)$ y $k_t\, ut(q_t) = u(q_1^0,\ldots,q^0_{t-1},q_t,q^0_{t+1},\ldots,q^0_T)$. Bleichrodt estableció que esta ponderación es la misma a lo largo de todos los periodos, es decir, $k_1=k_2=\ldots=k_T=1/T$. Bajo nuestra condición de

simetría $u_t(q_t)=u(q_t)$ que, junto con $k_t=1/T$, convierte a su $u(q)$ en una transformación afín positiva de nuestra $u(q)$ por la propiedad de unicidad de la utilidad esperada. Por lo tanto, son dos expresiones completamente equivalentes.

Referencias bibliográficas

Barron, F.H.; Winterfeldt, D. von y Fischer, G.W. (1984): "Empirical and theoretical realtionships between value and utility functions". Acta Psychologica, 56, 233-244.

Bleichrodt, H. (1995): QALYs and HYEs: "Under the conditions are they equivalent?". Journal of Health Economics, 14 (1), 17-38.

Bleichrodt, H. (1996): Applications of utility theory in the economic evaluation of health care. Thesis Erasmus University Rotterdam.

Beichrodt, H. y Gafni, A. (1996):" Time preference, the discounted utility model and health". Journal of Health Economics, 15, 49-66.

Broome, J. (1993):" Qalys". Journal of Public Economics, 50, 149-167.

Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980): Economics and consumer behavior. Cambridge: Cambridge University Press.

Drummond, M.F., Stoddart, G.L. y Torrance, G.W. (1991): Metodos para la evaluación económica de los programas de atención a la salud.(Martín, M.A., trad.). Madrid: Ediciones Díaz Santos. (Trabajo original publicado en 1987).

Dyer, J.S. y Sarin, R.K. (1979): "Measurable multiattribute value functions".Operations Research, 27 (4), 810-822.

Dyer, J.S. y Sarin, R.K. (1982): "Relative risk aversion". Management Science, 28 *(8),* 875-886.

Fischer, G.W. (1976):" Multidimensional utility models for risky and riskless choice". Organizational Behavior and Human Perfomance, 17, 127-146.

Fishburn, P.C. (1967): "Methods of estimating additive utilities". Management Secience, 13 (7), 435-453.

Fishburn, P.C. (1968): "Utility theory". Management Science, 14 (5), 335-378.

Fishburn, P.C. (1970): Utility theory for decision making. New York: Wiley.

Fishburn, P.C. (1982): The foundations of expected utility. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gafni, A. (1995): “Time in health: Can we measure individuals ‘pure time preferences’?”. Medical Decision Making, 15, 31-37.

Gafni, A. y Torrance, G.W. (1984): “Risk attitude and time preference in health”. Management Science, 30 (4), 440-451.

Johannesson, M. (1994): “QALYs, HYEs and individual preferences: A graphical illustration”. Social Science and Medicine, 39 (12), 1623-1632.

Johannesson, M. (1995): “The ranking properties of healthy-years equivalents and quality-adjusted life-years under certainty and uncertainty”. International Journal of Technology Assesment in Health Care, 11 (1), 40-48.

Johannesson, M.; Pliskin, J.S. y Weinstein, M.C. (1994): “A note on QALYs, time trade-off, and discounting”. Medical Decision Making, 14, 188-193.

Keeler, E.B y Cretin, S. (1983): “Discounting of life-saving and other nonmonetary effects”. Mamagement Science, 29 (3), 300-306.

Keeney, R. y Raiffa, H. (1976): Decisions with multiple objectives. New York: Wiley.

Krantz, D.H.; Luce, R.D.; Suppes, P. y Tversky, A. (1971): Foundations of measurement, vol 1. New York: Academic Press.

Kreps, D.M. (1988): Notes on the theory of choice. Colorado: Westview Press.

Loomes, G. y Mckenzie, L. (1989): "The use of QALYs in health care decision making2. Social Science and Medicine, 28, 299-308.

Maas, A. y Wakker, P. (1994): "Additive conjoint measurement for multiattribute utility2. Jorunal of Mathematical Psychology, 38, 86-101.

McNeil, B.J.; Weichselbaum, R. y Pauker, S.G. (1978): 2Fallacy the five-year survival in lung cancer2. New England Journal of Medicine, 299, 1397-1401.

McNeil, B.J.; Weichselbaum, R. y Pauker, S.G. (1981): 2Tradeoffs between quality and quality of life in laryngeal cancer2. New England Journal of Medicine, 305, 982-987.

Miyamoto, M.A. (1989): "Parametric model of the utility of survival duration: Tests of axioms in a generic utility framework". Organizational Behavior and Human Decision Processes, 44, 166-202.

Miyamoto, M.A. y Eraker, M.D. (1985): “Parameter Estimates for a QALY Utility Model”. Medical Decision Making, 5 (2), 191-213.

Miyamoto, M.A. y Eraker, M.D. (1988): “A multiplicative model of the utility of survival duration and health quality”. Journal of Experimental Psychology: General, 117 (1), 3-20.

Newman, J. von y Morgenstern, O. (1953): The theory of games and economic behavior. Princenton: Princenton University Press.

Olsen, J.A. (1993): “On what basis should health be discounted?2. Journal of Health Economics, 12, 39-53.

Pliskin, J.S.; Shepard, D.S. y Weinstein, M.C. (1980): “Utility functions for life years and health status”. Operations research, 28, 206-24.

Pratt, J.W. (1964): “Risk aversion in the small and in the large”. Econometrica, 32(1-2), 122-136.

Richard, S.F. (1975): “Multivariate risk aversion, utility independence and separable utility functions”. Management Science, 22 (1), 12-21.

Stiggelbout, A.M.; Kiebert, G.M.; Kievit, J.; Leer, J.W.H.; Stoter, G. y Haes, J.C.J.M. de (1994): “Adjustment of time tradeoff scores for the utility of life years and comparison with standard gamble scores”. Medical Decision Making, 14, 82.90.

Torrance, G.W. (1976): “Health status index models: A unified mathematical view”. Management Science, 22 (9), 990-1001.

Torrance, G.W., Thomas, W.H. y Sackett, D.L. (1972): “A utility maximization model for evaluation of health care programs”. Health Services Research, 7, 118-133.

Torrance, G.W. y Feeny, D. (1989): “Utilities and quality-adjusted life years”. International Journal of Technology Assesment in Health Care, 5, 559-575.

Weinstein, M.C. y Stason, W.B. (1977): “Foundations of cost-effectiveness analysis for health and medical practices”. New England Journal of Medicine, 296, 716-721.

Cuadro 1

Matriz de pagos

	θ_1: éxito	θ_2: fracaso
	$P(\theta_1)=0.75$	$P(\theta_2)=0.25$
A_1:tratamiento quirúrgico	(10 años extra de vida, salud normal)	Muerte inmediata
A_2:tratamiento farmacológico	(5 años extra de vida, salud normal)	(1 año extra de vida, salud deteriorada)

Gráfico 1

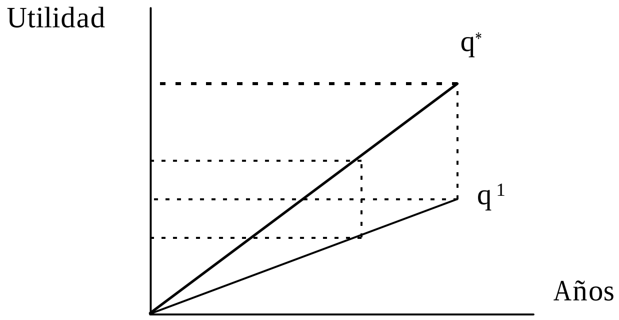

Gráfico 2